

Wisselstroomtheorie. Les 1.

Nadruk verboden 1

1. Wisselstromen en – spanningen.

1.1 stroomsoorten.

In het voorgaande hebben we steeds gebruik gemaakt van stromen en spanningen, welke voortdurend in dezelfde richting vloeien of werkzaam zijn. We spreken dan van gelijkstroom en gelijkspanning. Tevens gingen we uit van de gedachte, dat de stroom of spanning op elk tijdstip dezelfde waarde heeft. Een spanning of stroom welke aan deze voorwaarde voldoet, wordt aangeduid met de naam: zuivere gelijkspanning of –stroom.

Indien we in een assenstelsel op de horizontale as de tijd uitzetten, gedurende welke we de stroomwaarden noteren en op de verticale as de waarden van de stroom, dan verkrijgen we de grafische voorstelling van een gelijkstroom (zie fig. 1,1). Deze grafiek is, indien een zuivere gelijkstroom, weergegeven als een horizontale rechte lijn.

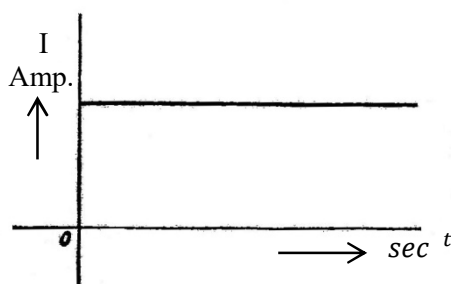


Fig. 1,1. Zuivere gelijkstroom.

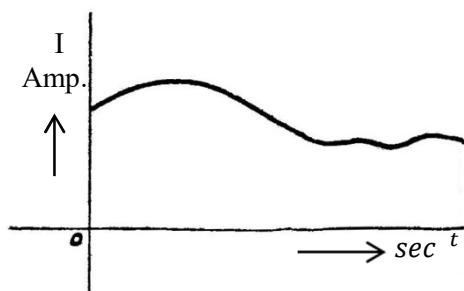


Fig. 1,2. Veranderlijke gelijkstroom.

Veelal zullen we ook met gelijkstromen en –spanningen te maken hebben, welke niet steeds dezelfde waarden hebben. We spreken dan van een veranderlijke gelijkstroom of –spanning (zie fig. 1,2).

We kunnen de gelijkspanning of –stroom op een bepaalde manier in waarde doen veranderen. Verandert de waarde zeer veel, of is de stroomwaarde op bepaalde momenten nul, dan spreekt men van pulserende gelijkstroom of pulserende gelijkspanning (zie fig. 1,3).

Indien een stroom of spanning niet steeds in dezelfde richting werkzaam is, maar wisselt van richting, dan hebben we te maken met de zogenaamde wisselstroom of wisselspanning. In fig. 1,4 hebben we een wisselstroom weergegeven, waarbij de stroomwaarde steeds dezelfde is, maar wisselt van richting. We kunnen de waarde van een wisselstroom op verschillende wijzen doen veranderen (zie fig. 1,5). Veranderen de stroom of spanningswaarden in beide richtingen zodanig dat de oppervlakten, aan beide zijden van de horizontale as, ingesloten door de grafiek, gelijk zijn, dan spreekt men van zuivere wisselstroom of –spanning (fig. 1,4 en 1,6). In figuur 1,4 zijn de oppervlakten van de rechthoeken boven en onder de horizontale

R.T.

2 W.T.

Nadruk verboden

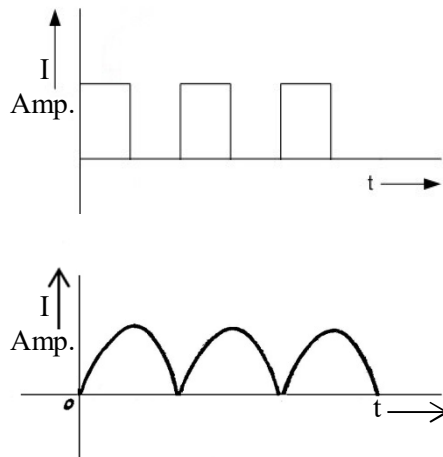


Fig. 1,3. Pulserende gelijkstroom.

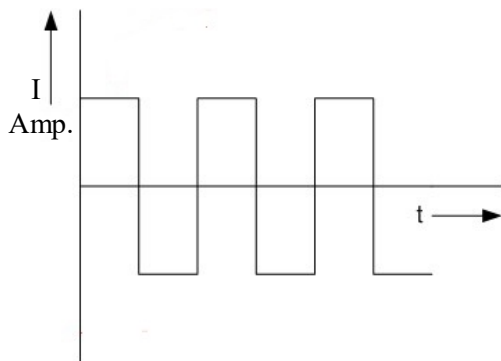


Fig. 1,4. Zuivere wisselstroom.

Deze sinusvormige wisselstroom of –spanning wordt veelal sinusoïdale wisselspanning of –stroom genoemd. We onderscheiden in het vervolg de sinusoïdale wisselspanning of –stroom en de niet sinusoïdale wisselstroom of –spanning, waarbij dan onder de laatste die stromen of spanningen worden verstaan welke een gedaante hebben die afwijkt van de sinusvorm. Zoals we in de toekomst zullen zien, zijn echter alle niet sinusvormige stromen of –spanningen op te vatten alsof ze zijn opgebouwd uit een of meer groot aantal sinusoïdale wisselspanningen of –stromen die onderling in bepaalde opzichten kunnen verschillen.

as, gelijk. En in fig. 1,6 zijn de oppervlakken van de figuren, ingesloten door abcd en defg gelijk.

Daar bij wisselstroom steeds sprake is van twee verschillende richtingen, waarin de stroom vloeit of de spanning werkzaam is, onderscheiden we die door de ene stroomrichting positief en de andere richting negatief te noemen. De stroomwaarden in de grafieken, welke boven de horizontale as getekend zijn, worden positief en de stroom- en spanningswaarden welke onder de horizontale as voorkomen dus negatief genoemd.

Een stroom- of spanningstype, waar we heel veel mee zullen werken, is in fig. 1,7 voor de stroom weergegeven.

Deze stroom verandert gedurende het verstrijken van de tijd, of korter gezegd, de stroom verandert als de functie van de tijd op dezelfde wijze als de sinus van een aangroeiende hoek. Deze figuur wordt sinusoïde genoemd (zie VL.M. 9,1).*

We spreken nu van een sinusvormige wisselstroom. Daar de ingesloten oppervlakken boven en onder de horizontale as, gelijk zijn, is dit dus ook een zuivere wisselstroom.

* VL.M. = vlakke meetkunde (FV)

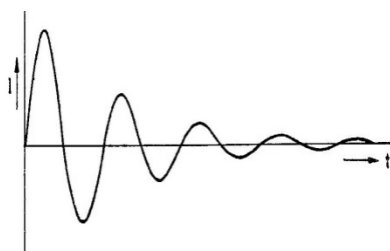
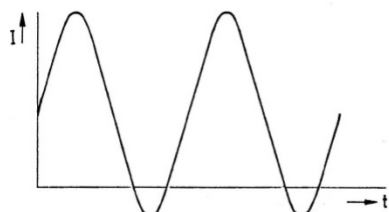


Fig. 1,5. Willekeurige wisselstromen.

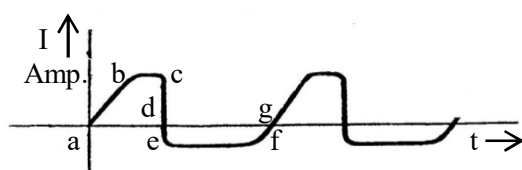


Fig. 1,6. Zuivere wisselstroom.

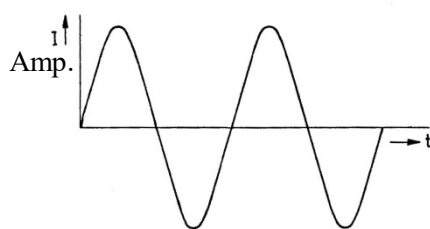


Fig. 1,7. Sinusvormige wisselstroom.

We zullen nu allereerst de gedragingen van sinusoïdale wisselstromen en –spanningen in verschillende elementen en verschillende schakelingen onderzoeken.

De eigenschappen van de schakelingen voor een sinusoïdale wisselspanning of –stroom zullen we allereerst vastleggen.

Is nu bijvoorbeeld op een schakeling een niet sinusoïdale wisselspanning werkzaam, dan kunnen we de effecten voor elk der sinusoïdale wisselspanningen waaruit de aangelegde spanning opgebouwd gedacht kan worden vastleggen. Het totale resultaat van de aangelegde spanning kunnen we nu vinden door de verkregen resultaten der sinusoïdale spanningen samen te stellen tot een gezamenlijk resultaat.

In het algemeen zal de betreffende schakeling zich voor de verschillende sinusoïdale wisselspanningen verschillend gedragen.

Het totaal resultaat dat we op bovenomschreven wijze zullen verkrijgen zal dus in het algemeen afwijken van het stroom- of spanningstype dat werd aangesloten.

Alvorens ons met de schakelingen bezig te houden, zullen we eerst nagaan hoe we een sinusoïdale wisselspanning kunnen opwekken en ons verdiepen in de wijze waarmee we een sinusvormige stroom of –spanning kunnen aangeven.

R.T.

4 W.T.

Nadruk verboden

1.2. Het opwekken van een sinusvormige wisselstroom.

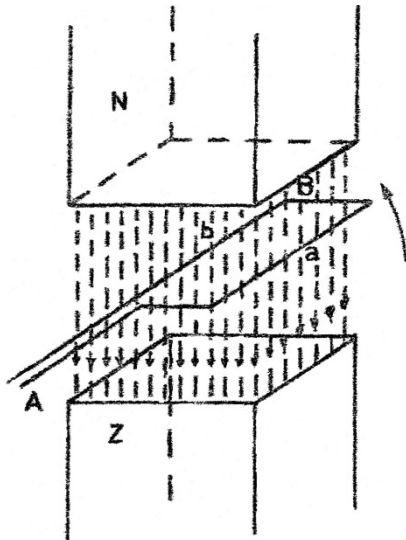


Fig. 1,8. Het opwekken van een sinusvormige wisselstroom.

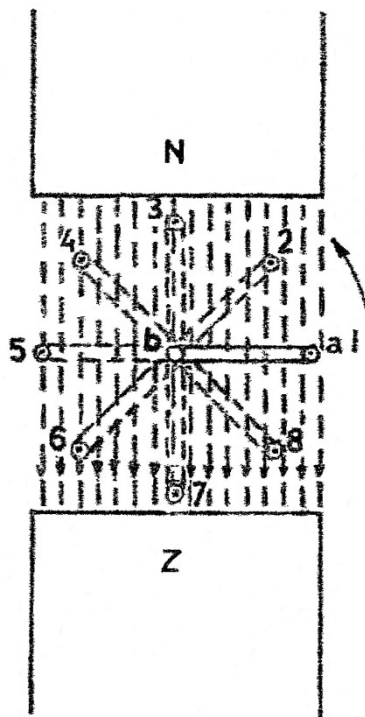


Fig. 1,9. Vooraanzicht van fig. 1,8.

We denken ons een rechthoekig gevormde winding, draaiend om AB in een homogeen magnetisch veld. (zie fig. 1,8)

Afhankelijk van de stand van de winding zal deze meer of minder flux omvatten. Gedurende de draaiing van de winding zal de omvatte flux veranderen en in de winding een emk van inductie doen ontstaan.

De richting van de emk is afhankelijk van het feit of de omvatte flux toe- of afneemt, terwijl de grootte van de emk afhankelijk is van de snelheid waarmee de magnetische flux toe- of afneemt. (zie de wet van Faraday).

Ter verduidelijking bezien we fig. 1,9 waarin we het vooraanzicht van fig. 1,8 hebben weergegeven. In stand 1 van de winding zien we het vlak van de winding loodrecht op de richting van de flux staan.

De winding omvat dus een maximum-flux.

In stand 2 is de omvatte flux kleiner dan in stand 1.

Gedurende deze draaiing van 1 naar 2 is dus in de winding een emk van inductie ontstaan welke in geleider a naar ons toe en in geleider b van ons af is gericht. Denk hierbij er aan dat de emk van inductie altijd een zodanige richting heeft, dat de fluxverandering wordt tegengewerkt. In de gehele winding zullen deze beide emk's elkaar ondersteunen. Draaien we de winding van 2 naar 3, dan zal eveneens de omvatte flux afnemen en de emk dus in dezelfde richting werkzaam blijven. In stand 3 is de omvatte flux minimaal (windingsvlak evenwijdig met de fluxrichting).

Gedurende de verplaatsing van de winding van 3 naar 4 zal de omvatte flux toenemen. Bij het passeren van stand 3 gaat de afname van de flux over in een toename. Dit zou een omkering van de richting der opgewekte emk van inductie ten gevolge hebben. We moeten echter bedenken, dat de flux nu ook de andere kant van de winding binnentreedt, hetgeen ook een omkering van de richting van de emk ten gevolge moet hebben.



Deze twee invloeden hebben tot resultaat, dat de emk gedurende het passeren van stand 3 niet van richting verandert. De winding draaiend van 3 naar 4 en van 4 naar 5 blijft de omvatte flux toenemen en in stand 5 de maximum-waarde te bereiken.

Gedurende het passeren van stand 5 gaat de fluxverandering van een toename over in een afname, dus zal de emk in een stand even na 5 een andere richting hebben dan gedurende de draaiing van 1 tot 5. Van stand 5 naar stand 6 en van stand 6 naar stand 7 blijft gedurende de beweging de omvatte flux afnemen, om in stand 7 wederom een minimum-waarde te bereiken. Gedurende de passage van stand 7 vindt hetzelfde plaats als we beredeneerd hebben bij stand 3 van de winding. De emk behoudt van stand 5 tot 1 dezelfde richting; echter tegengesteld aan de richting die de emk heeft gedurende de verplaatsing van stand 1 tot stand 5. We zien dus reeds dat in de winding gedurende één omwenteling een wisselspanning tot stand komt.

Indien we de winding met een constante snelheid laten rondwentelen, dan zal de grootte van de emk van inductie niet steeds dezelfde waarde hebben. Laten we de winding beschouwen tijdens het passeren van stand 1. De omvatte flux is dan maximaal en zal, als de winding van even voor stand 1 tot even na stand 1 beweegt niet veranderen. De geleider a beweegt zich dan over een zeer kleine draaiingshoek, evenwijdig met de fluxrichting. Gedurende het passeren van stand 1 zal in de winding dus geen emk van inductie ontstaan. Hetzelfde geldt gedurende het moment dat de winding stand 5 passeert.

Laten we de winding steeds kleine – gelijke – hoekjes draaien in de richting van stand 3, dan zal de fluxverandering bij het verplaatsen van de kleine hoekjes groter worden, naarmate stand 3 dichter wordt genaderd. Bij het bereiken van stand 3 zal dan de grootste fluxverandering plaatsvinden.

Men dient in het oog te houden, dat bij het bereiken van stand 3 de omvatte flux minimaal is, maar de verandering van de omvatte flux bij een kleine verandering van de draaiingshoek maximaal is.

Bij het passeren van stand 3 zal in de winding de grootste emk van inductie ontstaan.

Hetzelfde geldt voor stand 7, echter daar is de richting van de emk tegengesteld aan die in stand 3.

We zien dus, indien we de winding een volledige omwenteling laten maken van 1 naar 3, de emk toenemen van nul tot een bepaalde waarde, van 3 naar 5 afnemen tot nul, van 5 naar 7 in tegengestelde richting toenemen van tot een bepaalde waarde en van 7 naar 1 weer afnemen tot nul.

Indien we de draaiingshoek in graden uitdrukken en stand 1 laten overeenkomen met 0° , dan komen de standen 3, 5 en 7 respectievelijk overeen met 90° , 180° en 270° . Teruggekomen in stand 1 heeft de winding een hoek van 360° doorlopen.

Bij een draaiingshoek van 0° en 180° is de opgewekte spanning nul volt en bij een draaiingshoek van 90° en 270° is de opgewekte emk maximaal. We zien hier veel overeenkomst met de waarde van een sinus van een aangroeiende hoek van 0° tot 360° . Bewezen kan worden, dat het verloop van de spanning dezelfde gedaante heeft als een sinusoïde.

We kunnen de opgewekte spanning nu grafisch weergeven (zie fig. 1,10).

De grootte van de opgewekte spanning is ook afhankelijk van de snelheid waarmee de omvatte verandert, dus de snelheid waarmee de winding draait. Op de momenten dat de winding in fig. 1,9 de standen 3 en 7 passeert, is de sinus van de doorlopen hoek maximaal en gelijk 1.

De in de winding geïnduceerde spanning is dan eveneens maximaal. Deze maximum-waarde van de sinusvormige spanning wordt amplitude genoemd en aangeduid met $\hat{U}$. Zie ook fig. 1,10 bij 90° en 270° .

R.T.

6 W.T.

Nadruk verboden

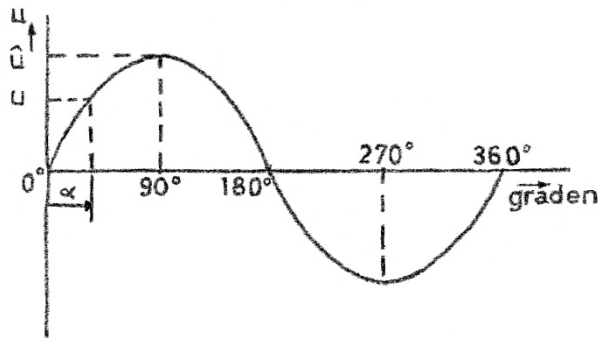


Fig. 1,10. Sinusvormige wisselspanning.

Op alle andere momenten treedt een zogenaamde momentele waarde van de spanning op, welke we aanduiden met de letter U . We kunnen de momentele waarde uitdrukken in de amplitude van de spanning:

$$U = \hat{U} \sin \alpha.$$

Voor elke waarde van de doorlopen hoek α is hieruit de momentele waarde te berekenen indien de amplitude bekend is.

We hebben in het bovenstaande gezien dat het gedurende het doorlopen van een hoek van 360° , een spanning in de winding wordt ontwikkeld zoals fig. 1,10 weergeeft.

Bij de volgende rondwenteling van de winding is weer een dergelijke spanning waar te nemen. Laten we de winding in een seconde 5 omwentelingen maken, dan verkrijgen we een spanning zoals fig. 1,11 weergeeft.

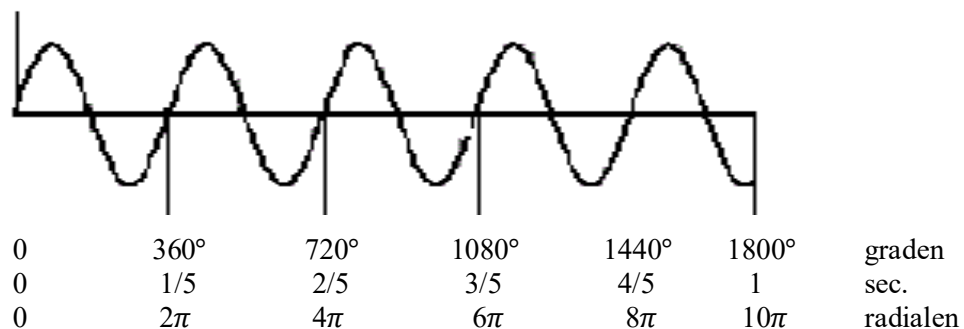


Fig. 1,11, sinusvormige wisselspanning met een frequentie van 5 Hz.

In deze figuur is o.a. naast de doorlopen hoek in graden ook de tijd, gedurende welke deze spanning tot stand komt, weergegeven. We zien dat na $1/5$ seconde dezelfde spanningsfiguur zich herhaalt.



De spanning bezit een periode. Een periode van een sinusvormige spanning is dat gedeelte, dat zich na het doorlopen van 360° herhaalt. Dus gedurende een omwenteling van de winding wordt een periode van de spanning opgewekt. Het aantal perioden dat per seconde wordt ontwikkeld, wordt de frequentie van de wisselspanning genoemd en aangeduid met de letter f . We zeggen dat de frequentie van de spanning volgens fig. 1,11, 5 perioden per sec. is.

Ook wordt de frequentie wel uitgedrukt in Hertz, symbool Hz of in cycles per sec. afgekort c/s.

De tijd, nodig voor het doorlopen van een periode van de wisselspanning wordt de trillingstijd T genoemd.

De hoek welke bij het ronddraaien van de winding per seconde wordt doorlopen, kunnen we uitdrukken in radialen (zie VI.M. 10).

Het aantal radialen dat per sec. wordt doorlopen, ook wel hoeksnelheid of cirkelfrequentie genoemd, dus het aantal radialen per sec. wordt aangegeven met de letter ω (omega). Daar per omwenteling dus 360° of 2π radialen doorlopen wordt, is de cirkelfrequentie gelijk aan $\omega = 2\pi f$ radialen per seconde.

Na t seconden is de doorlopen hoek dus ωt radialen. De momentele waarde van de sinusvormige spanning wordt nu $U = \hat{U} \sin \omega t$. In figuur 1,11 is tevens langs de horizontale as de doorlopen hoek in radialen aangegeven. Wat hiervoor is opgemerkt over de sinusvormige wisselspanning, geldt eveneens voor de sinusvormige stroom. De momentele waarde van een sinusvormige wisselstroom is:

$I = \hat{I} \sin \omega t$, waarin I de momentele waarde en $\hat{I}$ de amplitude voorstelt.

Het gedeelte $\sin \omega t$ uit bovenstaande uitdrukking wordt de fase van de spanning of stroom genoemd.

1.3 Gemiddelde waarde van een sinusvormige wisselstroom en – spanning.

Om in de gelegenheid te zijn de resultaten welke met een sinusvormige wisselstroom worden verkregen vast te leggen, is het nodig enkele andere grootheden naast de amplitude voor de wisselstroom in te voeren.

Allereerst dan de gemiddelde waarde. We kunnen ons het beste een idee vormen betreffende de gemiddelde waarde, door te bedenken, dat gedurende het tijdvak $t - t_0$ een zekere elektrische lading wordt verplaatst, zie fig. 1,12.

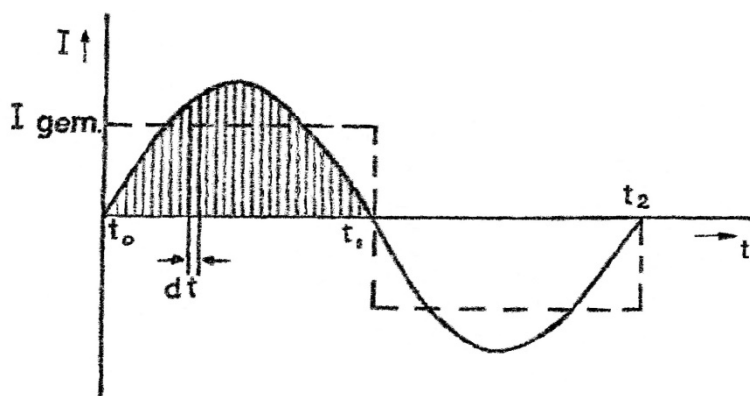


Fig. 1,12. Bepaling gemiddelde waarde van sinusvormige wisselstroom.

R.T.

8 W.T.

Nadruk verboden

De gemiddelde waarde is nu die gelijkstroom, die in dezelfde tijd $t_0 - t_1$, dezelfde lading verplaatst. Daar de stroomwaarde gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$ steeds verandert, verdelen we het tijdvak $t_0 - t_1$ in zeer kleine tijdvakjes dt , zo klein, dat we gedurende zo'n klein tijdvakje de stroom constant mogen denken. Gedurende elk zo'n klein tijdvakje wordt een lading $I dt$ verplaatst. We tellen nu alle kleine ladingen $I dt$, gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$, bij elkaar op en vinden dan de totaal verplaatste lading. Deze lading delen we nu door de totale tijd ($t_0 - t_1$) en vinden dan een gelijkstroomwaarde, welke in dezelfde tijd, dezelfde lading verplaatst als de wisselstroom van $t_0 - t_1$. Voor de gemiddelde waarde wordt dan gevonden:

$$I_{gem} = \frac{2}{\pi} \hat{I}.$$

Gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$ is ten gevolge van de stroomrichting de lading in een bepaalde (positieve) richting verplaatst. Van t_1 tot t_2 vloeit de stroom in tegengestelde (negatieve) richting. De lading zal dus ook in negatieve richting worden verplaatst. Daar de lading welke gedurende het Typ hier uw vergelijking tijdvak $t_1 - t_2$ wordt verplaatst even groot, echter tegengesteld van richting is, als gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$, is dus gedurende de gehele periode van de wisselstroom de totale ladingsverplaatsing nul en dus ook de gemiddelde waarde gelijk aan nul.

De gemiddelde waarde van een halve periode van een sinusvormige wisselstroom is dus

$$I_{gem} = \frac{2}{\pi} \hat{I}.$$

en de gemiddelde waarde van één of meer volledige perioden is gelijk nul.

De gemiddelde waarde van een halve periode van een sinusvormige wisselspanning is derhalve:

$$U_{gem} = \frac{2}{\pi} \hat{U}.$$

We zien dus dat de gemiddelde waarde van een sinusoidale wisselspanning, over een periode of langer tijdvak gemeten, gelijk nul is. Dit geldt eveneens voor elke zuivere wisselspanning of –stroom. Immers, dan zijn de oppervlakken van de figuur onder en boven de horizontale as even groot en over een periode gemeten tezamen nul.

We moeten echter wel bedenken, dat de gemiddelde waarde voor een stroom- of spanningsfiguur aan een zijde van de horizontale as alleen dan gelijk is aan $\frac{2}{\pi}$ maal de amplitudewaarde, indien de spanning of stroom een sinusoidaal verloop heeft.

Voor ieder ander stroom- of spanningstype zullen we, zoals we later zullen zien, een andere gemiddelde waarde verkrijgen en zal dus voor elke andere stroom- of spanningsgrafiek moeten worden berekend.

Is de stroom of spanning geen zuivere wisselstroom of –spanning, dan kan dus ook de gemiddelde waarde van een periode of langere tijd niet nul zijn.

Te maken W.T. no. 1 t/m 8.

Oplossingen inleveren.

1.4. Effectieve waarde van een sinusvormige wisselstroom.

Een tweede grootheid die veel gebezigd wordt, om een sinusvormige wisselspanning of – stroom aan te duiden is de effectieve waarde.

Onder de effectieve waarde van een sinusvormige wisselstroom wordt verstaan, die gelijkstroom, welke in dezelfde tijd en in dezelfde weerstand, dezelfde energie levert als de wisselstroom.

We stellen ons een sinusvormige stroom gaande door een weerstand voor (zie fig. 1,13). Deze stroom zal op elk moment een energie leveren aan de weerstand, welke gelijk is aan: $I^2 R = \hat{I}^2 R \sin^2 \omega t$. De energie is recht evenredig met het kwadraat van de momentele waarde van de wisselstroom. De energie-ontwikkeling zal dus op gelijke wijze veranderen als het kwadraat van de momentele waarde. Tot de grafiek welke het verloop van het kwadraat van de stroomsterkte weergeeft, kunnen we als volgt komen.

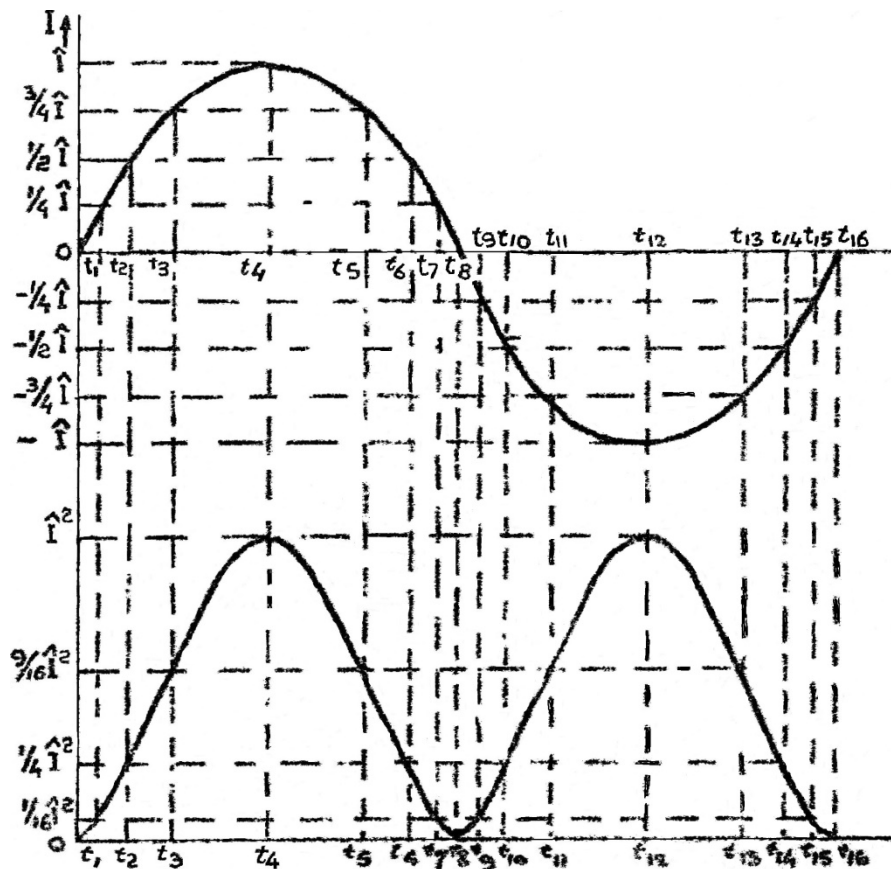


Fig.1.13. Bepaling effectieve waarde van sinusvormige wisselstroom.

Op tijdstippen t_2 en t_6 is de momentele waarde van de stroom $\frac{1}{2} \hat{I}$. Het kwadraat hiervan is $\frac{1}{4} \hat{I}^2$.

In de onderste figuur zetten we deze waarde uit bij t_2 en t_6 . De momentele waarde van de stroom op de tijdstippen t_1 en t_7 is $\frac{1}{4} \hat{I}$; het kwadraat hiervan is $\frac{1}{16} \hat{I}^2$. Op de momenten t_3 en t_5 is de stroom $\frac{3}{4} \hat{I}$ en het kwadraat $\frac{9}{16} \hat{I}^2$. Gedurende het tijdvak t_8 tot t_{16} is de momentele waarde van de stroom negatief.

R.T.

10 W.T.

Nadruk verboden

Op momenten t_{10} en t_{14} dus $-\frac{1}{2} \hat{I}$. Het kwadraat wordt echter positief en wel $\frac{1}{4} \hat{I}^2$. Dat dit resultaat positief is, evenals voor alle tijdstippen tussen t_8 en t_{16} , is makkelijk voor te stellen; immers zowel bij positieve als bij negatieve richting wordt in de weerstand energie (warmte) ontwikkeld.

Indien we de verkregen waarden bij de desbetreffende tijdstippen in de onderste figuur uitzetten en door een lijn verbinden, verkrijgen we de gr van 1,13afiek welke het verloop van het kwadraat van een sinusvormige stroom weergeeft. Op gelijke wijze verandert de energieontwikkeling ten gevolge van een sinusvormige stroom.

Op soortgelijke wijze als in fig. 1,12 kunnen we nu in de onderste figuur van 1,13 de tijd in zeer kleine tijdvakjes verdelen; per tijdseenheid de energie bepalen en de energie van al die tijdvakjes bij elkaar optellen.

Deze totale energie stellen we gelijk aan de energie welke een gelijkstroom in dezelfde tijd, gaande door dezelfde weerstand, ontwikkelt. De benodigde gelijkstroom is hieruit te bepalen en wordt de effectieve waarde van de sinusvormige wisselstroom genoemd. Voor de effectieve waarde wordt dan gevonden:

$$I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \hat{I} \text{ en voor de spanning:}$$

$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \hat{U}.$$

$\sqrt{2}$ kunnen we gelijkstellen aan 1,41.

Tussen de gemiddelde en de effectieve waarde van een sinusvormige wisselstroom of –spanning bestaat een vaste verhouding, de vormfactor, deze is gelijk aan:

$$\frac{I_{eff}}{I_{gem}} = \frac{\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} \hat{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2} = 1,11.$$

Bij de bepaling van de effectieve waarde van een stroom of spanning moeten we bedenken dat datgene dat we nu hebben afgeleid alleen geldt voor de sinusoïdale wisselspanning of –stroom. Voor elk ander stroom- of spanningstype zal weer een andere vorm voor de effectieve waarde worden gevonden.

De vormfactor is alleen een gegeven voor de verhouding van de effectieve waarde en de gemiddelde waarde over een halve periode gemeten van een sinusoïdale wisselspanning of –stroom.

In de praktijk, namelijk vooral in de elektrotechniek, bezigt men veelal de effectieve waarde van een wisselstroom of –spanning daar de stroom of spanning in het algemeen gebruikt wordt voor het leveren van energie.

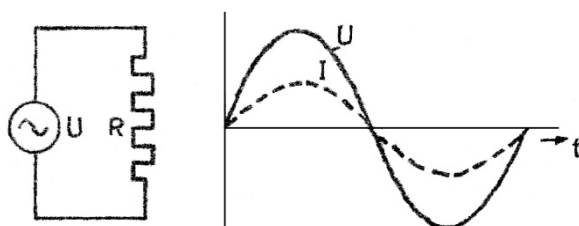
In de radiotechniek zullen we meermalen de amplitudewaarde van de wisselstroom of –spanning gebruiken.

Te maken opgaven W.T. No. 9 t/m 11.
Oplossingen inleveren.

Hoofdstuk 2.

Wisselspanningen, aangesloten op reactanties en impedanties.2.1. Wisselspanning aangesloten op een weerstand.

Indien een sinusvormige wisselspanning aangesloten wordt op een weerstand, dan zal een wisselstroom optreden, welke in gelijke tred met de spanning verandert. Bij toenemende spanning ontstaat een toenemende stroom, bij afnemende spanning een afnemende stroom enz. (zie fig. 2,1). We zeggen nu dat de stroom in fase (in gelijke tred) is met de spanning. De amplitude van de stroom is nu te berekenen uit:



$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}.$$

Indien de aangelegde spanning is voorgesteld door $U = \hat{U} \sin \omega t$, dan is de momentele waarde van de stroom bepaald door:

$$I = \frac{\hat{U}}{R} \sin \omega t.$$

Fig. 2,1. Wisselspanning aangesloten op een weerstand.

daar de stroom in fase is met de spanning, wordt de fase in beide gevallen dus $\sin \omega t$.

2.2. Wisselspanning aangesloten op een condensator.

Zoals we hebben gezien, zal, indien een condensator wordt aangesloten op een gelijkspanning, er een laadstroom optreden, totdat de condensator geladen is. Daarna blijft de stroom in de keten gelijk aan nul. In een keten met een condensator kan dus geen gelijkstroom vloeien. We zeggen dan wel dat een condensator voor gelijkstroom een oneindig grote weerstand bezit.

Sluiten we een wisselspanning aan op een condensator, dan zal hetgeen plaatsvindt veel gecompliceerder zijn, daar de spanning verandert in waarde en omkeert van richting.

Indien de spanning U_a (fig. 2,2) van nul tot een zekere waarde aangroeit, zal een laadstroom optreden. Deze laadstroom heeft tot gevolg dat de condensator een lading krijgt en dus ook een spanning zal bezitten. Deze spanning U_1 is in tegengestelde zin werkzaam ten opzichte van de aangelegde spanning U_a . De aangelegde spanning zal dus tegengewerkt worden door de spanning op de condensator,

Stellen we ons voor dat de aangelegde spanning U_a van nul tot een zeer kleine waarde aangroeit, dan kunnen we ons een ogenblik indenken, dat de condensator nog geen spanning heeft en er dus geen tegenwerking in de keten optreedt. De stroom zal dan een grote waarde hebben en zelfs een maximum waarde hebben. Een ogenblik daarna zal de condensator wel een spanning bezitten en U_a tegenwerken. Ten gevolge hiervan zal de stroom kleiner worden. Naarmate de condensator verder wordt opgeladen, dus een grotere spanning U_1 krijgt, zal de stroom kleiner worden. Op het moment dat U_a de maximum-waarde bereikt, kunnen we deze spanning gedurende een kort ogenblik constant denken (de grafiek loopt dan horizontaal).

R.T.

12 W.T.

Nadruk verboden

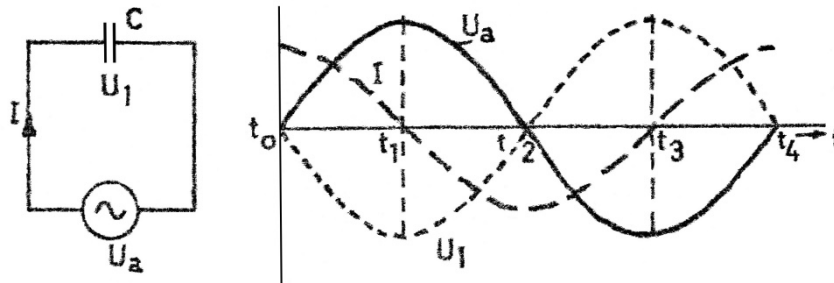


Fig. 2,2. Wisselspanning
aangesloten op een condensator.

De condensator is dan ook tot de maximum-waarde opgeladen en heeft een spanning van gelijke grootte als U_a , echter tegengesteld van richting werkzaam. Deze beide spanningen (U_a en U_1) heffen elkaar op en er kan dus geen stroom in de keten vloeien. In Fig. 2,2 zien we gedurende het tijdvak t_0 tot t_1 U_a van nul tot positief maximum toenemen, U_1 van nul tot negatief maximum toenemen en I van positief maximum tot nul afnemen.

In het tijdvak van t_1 tot t_2 neemt U_a van positief maximum af tot nul. Ten gevolge hiervan zal de condensator zich gaan ontladen. Immers daar U_a afneemt, zal ook U_1 gaan afnemen, want deze kan niet groter zijn dan U_a . Naarmate de waarde van U_a sneller afneemt, moet U_1 ook sneller afnemen, dus meer lading opgeven, ofwel een grotere ontladstroom voeren.

Dat U_a , naarmate het tijdstip t_2 meer wordt genaderd, sneller gaat afnemen, volgt uit het verloop van de sinusoïde, deze gaat steeds steiler verlopen. Zo zien we de ontladstroom aangroeien van nul tot maximum-waarde. Deze ontladstroom is onder de horizontale as weergegeven, daar deze een richting heeft tegengesteld aan die van de laadstroom. Gedurende het tijdvak $t_1 - t_2$ zien we dus U_a afnemen van de positieve maximum-waarde tot nul, U_1 afnemen van de negatieve maximum-waarde tot nul en I toenemen van nul tot negatief maximum.

Gedurende het tijdvak $t_2 - t_3$ gaat U_a in tegengestelde richting aangroeien en in het tijdvak $t_3 - t_4$ van negatief maximum afnemen tot nul. In deze tijdvakken gebeurt precies hetzelfde als we hebben beredeneerd voor het tijdvak $t_0 - t_2$, echter in tegengestelde richting.

Beschouwen we fig. 2,2 eens in zijn geheel, dan zien we, dat de stroom niet meer in gelijke tred is met de aangelegde spanning; op de momenten dat U_a maximum is, is de stroom nul en omgekeerd. De stroom heeft nu een faseverschuiving ten opzichte van de spanning. De stroom is over een hoek van 90° of $\pi/2$ radialen verschoven te opzichte van de spanning en wel voorijlend. We zien de stroom van nul tot $\pi/2$ van positief maximum afnemen tot nul, terwijl de spanning dezelfde verandering ondergaat van $\pi/2$ tot π . De stroom ijlt dus 90° voor op de aangelegde spanning.



Indien we een wisselspanning van een bepaalde waarde en met een zekere frequentie op een condensator aansluiten, dan zal er een bepaalde stroom optreden. De stroom wordt bepaald door de grootte van de weerstand welke de condensator voor de wisselstroom vormt. Daar deze weerstand een zeer bijzonder karakter heeft – immers hij veroorzaakt ook 90° faseverschuiving – wordt deze aangeduid met de naam schijnbare weerstand of reactantie.

De reactantie van een condensator is te berekenen uit:

$$R_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \text{ ohm.}$$

In deze uitdrukking is ω de cirkelfrequentie van de aangelegde spanning en C is uitgedrukt in farad. We zien, dat de reactantie van een condensator omgekeerd evenredig is met de frequentie en met de capaciteit.

Naarmate de frequentie en de capaciteit groter worden, neemt de capacatieve reactantie af; terwijl bij afname van de frequentie of vermindering van de capaciteit, de schijnbare weerstand juist toeneemt. Wordt de frequentie van de aangelegde spanning gelijk aan nul, d.w.z. dat een gelijkspanning op de condensator wordt aangesloten, dan blijkt dat de reactantie oneindig groot wordt, dus de stroom nul zal worden.

Of de frequentie nu toe- of afneemt, of dat de capaciteit van grootte verandert, wijzigt echter niets in de faseverschuiving tussen de stroom en de spanning; deze blijft 90° .

Is de momentele waarde van de aangelegde wisselspanning aangegeven met $U_a = \hat{U} \sin \omega t$, dan is de amplitude van de optredende wisselstroom, volgens de wet van Ohm, bepaald door:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_a}{\frac{1}{\omega C}} = \hat{U}_a \cdot \omega C.$$

Bij het bepalen van de fase van de stroom moeten we bedenken dat de stroom $\frac{\pi}{2}$ radialen voorijlt, dus de fase van de stroom is $\frac{\pi}{2}$ groter dan de fase van de aangelegde spanning.

De momentele waarde van de stroom is dus bepaald door: $I = \hat{U} \omega C \left(\sin \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$.

In de meetkunde hebben we gezien, dat een sinusöide werd ontwikkeld met behulp van een draaiende lijn. Een sinusvormige wisselspanning of –stroom kunnen we ook ontstaan denken door een roterende lijn. De roterende lijn stelt nu een spanningswaarde of stroomwaarde voor.

We kunnen de wisselstroomproblemen nu voorstellen door deze roterende lijnen. We bereiken hiermede, dat we een beter overzicht krijgen van hetgeen in een schakeling plaatsvindt en dat we ook gemakkelijker de grootheden kunnen herkennen.

We kunnen de aangelegde spanning aangeven door de lijn $\hat{U}_a$ in fig. 2,3, waarbij we moeten bedenken, dat deze lijn met een hoeksnelheid ω roteert. Algemeen gebruikelijk is het, de draairichting linksom, dus tegen de bewegingsrichting van de wijzers van een uurwerk te kiezen. We geven dit aan door een pijl met vermelding van de hoeksnelheid ω . De stroom door de condensator ijlt 90° voor op deze spanning, dus geven we deze aan door een lijn welke 90° vooruitgedraaid is t.o.v. de aangelegde spanning.

Op deze wijze ontstaat een vectordiagram en de lijnen welke daarin voorkomen, zoals $\hat{U}_a$ en $\hat{I}$ worden vectoren genoemd.

De lengte van de vectoren is bepaald door de amplitude van de stroom en van de spanning.

Deze waarden kunnen op bepaalde schaal in tekening worden gebracht. Daar er echter een vaste

verhouding bestaat tussen de amplitude en de effectieve waarde van de stroom en de spanning, kunnen met de vectoren, zij het op andere schaal, ook de effectieve waarden worden aangegeven.

Daar de effectieve waarden constante grootheden zijn; niet meer afhankelijk van de tijd, kunnen we de vectoren ook tekenen zonder ons er in te verdiepen op welk tijdstip de vectoren getekend moeten worden.

Dit geeft veel vereenvoudiging daar we slechts de vectoren onderling hebben te beoordelen.

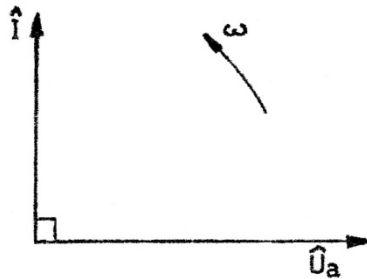


Fig. 2,3. Vectordiagram van stroom en spanning bij een condensator.

2.3. Wisselspanning, aangesloten op een serieschakeling van condensator en weerstand.

In de schakeling volgens fig. 2,4 zal de aangelegde spanning U_a een stroom door de keten ten gevolge hebben, welke door de weerstand en condensator dezelfde waarde heeft. De stroom welke in deze keten optreedt, is in fig. 2,5 door de getrokken sinusoïde weergegeven.

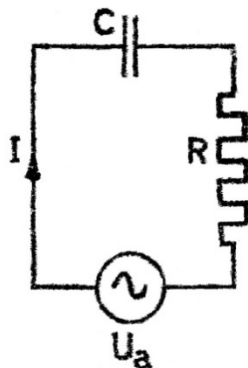


Fig. 2,4. Serieschakeling van condensator en weerstand

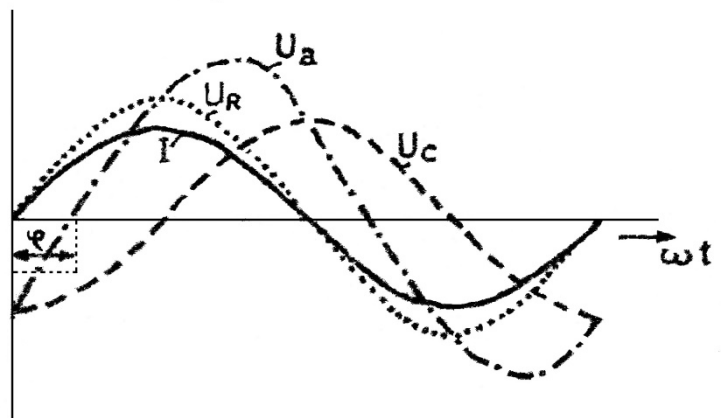


Fig. 2,5. Stroom en spanningen als functie van de tijd voor de schakeling volgens fig. 2,4.

Deze stroom veroorzaakt een spanning $U_R = I \times R$ over de weerstand, welke in fase is met de stroom. Deze spanning is door een gestippelde sinusoïde weergegeven. Over de condensator ontstaat, ten gevolge van de stroom, een spanning $U_C = I \times \frac{1}{\omega C}$, welke 90° of $\frac{\pi}{2}$ radialen na-ijlt op de stroom, (zie gestreepte lijn in fig. 2,5). Het verloop van de aangelegde spanning, welke genoemde stroom ten gevolge heeft, kunnen we nu vastleggen, door op elk moment de som te nemen van de momentele waarden van de spanningen U_R en U_C .



Op de momenten dat deze spanningen tegengestelde richtingen hebben, nemen we het verschil van de momentele waarden. We verkrijgen de streep-stip lijn, welke het verloop van U_a weergeeft. We zien dat deze spanning een hoek φ , welke kleiner is dan 90° , na-ijlt op de stroom in de keten.

We gaan nu dezelfde keten, volgens fig. 2,4, nog eens bekijken, maar nu met behulp van een vectordiagram. Hiertoe plaatsen we allereerst de stroomvector I (zie fig. 2,6). Deze stroom veroorzaakt een spanning U_R over de weerstand in fase met de stroom.

Deze vector laten we dus samenvallen met de stroomvector. Verder wordt over de condensator een spanning U_C teweeggebracht, welke 90° op de stroom na-ijlt. Deze tekenen we dus loodrecht naar beneden.

De aangelegde spanning U_a moet nu een zodanige waarde hebben, dat deze gelijk is aan de totale spanning, welke over R en C wordt ontwikkeld. De gezamenlijke waarde van U_R en U_C kunnen we, nu deze beide vectoren een rechte hoek met elkaar vormen, vinden door op U_R en U_C een rechthoek te construeren en in deze rechthoek een diagonaal te tekenen.

Deze diagonaal is nu de meetkundige som van U_R en U_C en stelt de grootte en richting van U_a voor. We zien ook hier dat U_a een hoek φ na-ijlt op U_R . Deze hoek is kleiner dan 90° .

Met behulp van het verkregen vectordiagram

zijn we in de gelegenheid enige grootheden van de schakeling volgens fig. 2,4 te berekenen.

Door toepassing van de stelling van Pythagoras, kunnen we een verband opschrijven tussen de spanningen welke in dit diagram zijn getekend.

De stelling van Pythagoras luidt:

In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de hypotenusa gelijk aan de som van de kwadraten van beide rechthoekszijden.

Dus voor de rechthoekige driehoek, welke gevormd wordt door U_a , U_R en U_C (de stippellijn aan het einde van U_R is gelijk aan U_C), geldt:

$$U_a^2 = U_R^2 + U_C^2 \text{ of}$$

$$U_a^2 = I^2 R^2 + I^2 \frac{1}{\omega^2 C^2} \text{ en}$$

$$U_a^2 = I^2 \left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right).$$

Door aan beide zijden van het = -teken de wortel te trekken verkrijgen we:

$$U_a = I \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

Delen we nu beide zijden van het = -teken door I dan vinden we:

$$\frac{U_a}{I} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

We weten, dat een spanning gedeeld door een stroom een weerstand oplevert.

Hier zal het quotiënt $\frac{U_a}{I}$ dus de weerstand aangeven, welke de gegeven schakeling aan de stroom biedt. Daar deze weerstand niet op te vatten is als een gewone weerstand, omdat hij een faseverschuiving ten gevolge heeft, geven we deze aan met de naam impedantie (Z).

$$\text{Dus: } \frac{U_a}{I} = Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

De faseverschuiving welke optreedt tussen stroom en spanning is nu te bepalen door de tangens van hoek φ vast te leggen.

$$\tan \varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{I \times \frac{1}{\omega C}}{I \times R} = \frac{1}{\omega C R}.$$

We moeten echter wel bedenken, dat φ nu de hoek is waarmede de spanning na-ijlt op de stroom of omgekeerd: de hoek waarmede de stroom voorijlt op de spanning

Soms is het nodig de cosinus van de hoek van faseverschuiving te bepalen. De cosinus van een hoek is bepaald door het quotiënt van de aanliggende rechthoekszijde en de hypotenusa van een rechthoekige driehoek. In de driehoek gevormd door U_R , U_C en U_a is $\cos \varphi = \frac{I \times R}{I \times Z}$ of:

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

Is de aangelegde spanning gegeven door $U_a = \hat{U}_a \sin \omega t$, dan is nu de momentele waarde van de stroom bepaald door:

$$I = \frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\omega t + \varphi),$$

waarin $\frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$ de amplitude van stroom voorstelt en φ de de faseverschuiving

tussen I en U_a . Indien we het vectordiagram nog eens bekijken, dan zien we dat de daarin voorkomende vectoren, de verhoudingen weergeven van de spanningen, welke zich in het circuit voordoen.

Deze verhoudingen blijven ongewijzigd bestaan, indien we alle vectoren door hetzelfde getal delen. De spanningsvectoren kunnen alle voorgesteld worden door het product van de stroom en weerstand, reactantie of impedantie. Delen we alle vectoren door I dan houden we vectoren over welke de weerstand, reactantie en impedantie voorstellen (zie fig. 2,7).

Hieruit blijkt dus dat we ook een vectordiagram kunnen maken door de weerstand, reactantie en impedantie als vectoren uit te zetten. Het is gemakkelijk in te zien, dat de grootheden zoals impedantie, $\tan \varphi$ en $\cos \varphi$ ook uit dit diagram zijn af te leiden.

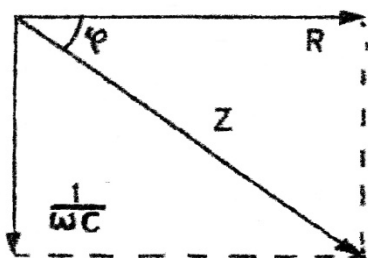


Fig. 2,7. Vectordiagram voor reactantie en impedantie.

Voorbeeld: Voor de schakeling volgens fig. 2,4 is gegeven: $\hat{U}_a = 100 \text{ V}$; $R = 30 \Omega$; $C = 25000 \text{ pF}$ en $\omega = 10^6$. Bereken de stroom in de keten, de spanning over R en over C, de tangens en de cosinus van de hoek van faseverschuiving.

Oplossing:

De stroom in de keten is bepaald door:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{100}{\sqrt{900 + \frac{1}{10^{12} \cdot 625 \cdot 10^{-12}}}}$$

$$= \hat{I} = \frac{100}{\sqrt{900 + \frac{10^6}{625}}} \quad \hat{I} = \frac{100}{\sqrt{900 + 1600}} = \frac{100}{\sqrt{2500}} = \frac{100}{50} = 2 \text{ A.}$$

De spanning over de weerstand is te berekenen uit:

$$\hat{U}_R = \hat{I} \cdot R = 2 \times 30 = 60 \text{ V.}$$

De spanning over de condensator is: $\hat{U}_C = \hat{I} \frac{1}{\omega C}$.

$$\hat{U}_C = 2 \times \frac{1}{10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 2 \times \frac{10^3}{25} = 2 \times 40 = 80 \text{ V.}$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{\omega C R} = \frac{1}{10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-9} \cdot 30} = \frac{1}{75 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^2}{75} = \frac{4}{3}.$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{I \cdot R}{I \cdot Z} = \frac{60}{100} = 0,6.$$

Voorbeeld: Op een serieschakeling van een weerstand en een condensator is een wisselspanning $\hat{U}_a$ van 200 V werkzaam. Over de weerstand is een spanning aanwezig van $\hat{U}_R = 100 \text{ V}$. Hoe groot is de capaciteit van de condensator als verder nog gegeven is:

$\omega = 10^6$ en $R = 500 \Omega$.

Oplossing: Het verband tussen de voorkomende spanningen is:

$$\hat{U}_a^2 = \hat{U}_R^2 + \hat{U}_C^2. \text{ Hieruit is de spanning over C te berekenen.}$$

$$4 \cdot 10^4 = 10^4 + \hat{U}_C^2.$$

$$\hat{U}_C^2 = 3 \cdot 10^4 \text{ of } \hat{U}_C = 100\sqrt{3} \text{ volt} = 173 \text{ volt.}$$

De stroom in de keten is bepaald door: $\hat{I} = \frac{\hat{U}_R}{R} = \frac{100}{500} = \frac{1}{5} \text{ A.}$

De reactantie van de condensator is te berekenen uit:

$$\hat{U}_C = \hat{I} \times \frac{1}{\omega C} \text{ of } \frac{1}{\omega C} = \frac{\hat{U}_C}{\hat{I}} = \frac{100\sqrt{3}}{\frac{1}{5}} = 500\sqrt{3} \Omega.$$

$$\frac{1}{\omega C} = 500\sqrt{3} \text{ of } C = \frac{1}{\omega \cdot 500\sqrt{3}} = \frac{1}{10^6 \cdot 500\sqrt{3}} = \frac{1}{5 \cdot 10^8 \sqrt{3}} \text{ farad.}$$

In pF wordt dit:

$$\frac{10^{12}}{5 \cdot 10^8 \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 10^3}{1,73} = \mathbf{1156 \text{ pF.}}$$

2.4. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van condensator en weerstand.

Bij de parallelschakeling van weerstand en condensator (fig. 2,8) zien we, dat op beide onderdelen dezelfde spanning staat en wel U_a .

De stroom I_t , welke de krachtbron levert, splitst zich nu in twee delen I_R en I_C . De stroom door de

weerstand is nu bepaald door: $I_R = \frac{U_a}{R}$

en de stroom door de condensator $I_C = \frac{U_a}{\frac{1}{\omega C}} = U_a \cdot \omega C$.

We zullen allereerst het vectordiagram van de gegeven schakeling ontwikkelen (fig. 2,9).

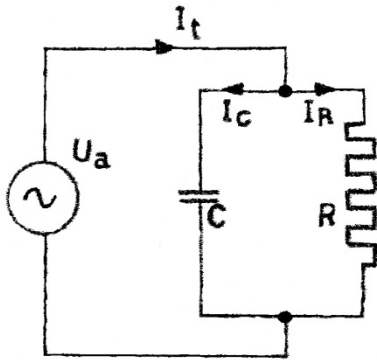


Fig. 2,8. Wisselspanning aangesloten op parallelschakeling van condensator en weerstand.

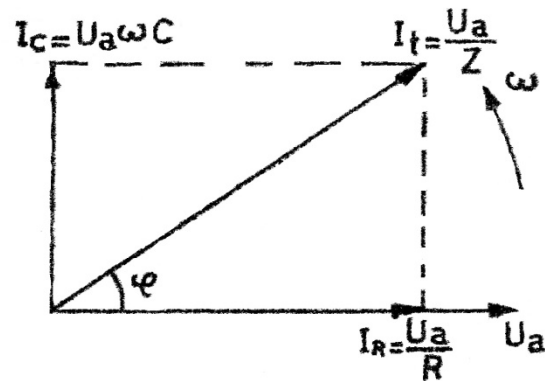


Fig. 2,9. Vectordiagram van parallelschakeling van weerstand en condensator.

We tekenen eerst een vector die U_a voorstelt. De vector die I_R aangeeft moet samenvallen met U_a , daar tussen deze grootheden geen faseverschuiving optreedt. De vector voor de stroom door de condensator moet 90° voorijlen op U_a . Het resultaat van beide stromen, de grootte en richting van I_t , vinden we weer door op beide stromen, I_R en I_C , een rechthoek te construeren en in deze rechthoek de diagonaal te tekenen. De verkregen diagonaal stelt I_t voor en is volgens de stelling van Pythagoras bepaald door: $I_t^2 = I_R^2 + I_C^2$.

De totaalstroom I_t heeft een faseverschuiving ten opzichte van U_a , welke door φ is aangegeven. In bovengenoemde uitdrukking voor I_t kunnen we de reeds gegeven waarden voor I_R en I_C invullen. Dit geeft:

$$I_t^2 = \frac{U_a^2}{R^2} + U_a^2 \omega^2 C^2.$$

Delen we beide kanten van het = -teken door U_a^2 dan verkrijgen we:

$$\frac{I_t^2}{U_a^2} = \frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2. \text{ en na worteltrekking: } \frac{I_t}{U_a} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}.$$

Te maken opgaven W.T. No. 16 t/m 24.
Oplossingen inleveren.



Het quotiënt $\frac{I_t}{U_a}$ is de omgekeerde waarde van weerstand of in dit geval impedantie Z , dus:

$$\frac{I_t}{U_a} = \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 C^2 R^2}{R^2}} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}{R}$$

De impedantie is nu:

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

De faseverschuiving is wederom bepaald door (fig. 2,9):

$$\tan \varphi = \frac{I_C}{I_R} = \frac{U_a \omega C}{\frac{U_a}{R}} = R \omega C, \text{ waarbij de stroom dus een hoek } \varphi \text{ voorijlt op de aangelegde spanning.}$$

De cosinus van de hoek van faseverschuiving is:

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I_t} = \frac{\frac{U_a}{R}}{\frac{U_a \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}{R}} = \frac{U_a}{R} \times \frac{R}{U_a \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

Stellen we de aangelegde wisselspanning voor door $U_a = \hat{U}_a \sin \omega t$, dan is de momentele waarde van de totale stroom voor te stellen door:

$$I_t = \hat{I}_t \sin(\omega t + \varphi) =$$

$$I_t = \frac{\hat{U}_a}{\frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{U}_a \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}{R} \sin(\omega t + \varphi).$$

Voorbeeld: Bepaal de grootte en fase van de totaalstroom, welke een parallelschakeling van condensator en weerstand opneemt, alsmede de stroom door de weerstand en condensator.

Gegeven is: $\hat{U}_a = 50 \text{ V}$, $\omega = 10^6$, $C = 1250 \text{ pF}$ en $R = 600 \Omega$.

Oplossing: de totaalstroom is te berekenen uit:

$$I_t = \frac{U_a}{\frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}} = \frac{U_a \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}{R} = \frac{50 \sqrt{1 + 10^{12} \cdot 1250^2 \cdot 10^{-22}}}{600}.$$

$$I_t = \frac{50 \sqrt{1 + 10^4 \cdot 125^2 \cdot 10^{-11}}}{600} = \frac{\sqrt{1,5625}}{12} = \frac{1,25}{12} = \mathbf{0,104 \text{ A}}.$$

$$I_R = \frac{U_a}{R} = \frac{50}{600} = \frac{1}{12} \text{ A} = \mathbf{0,083 \text{ A}}.$$

$$I_C = \frac{U_a}{\frac{1}{\omega C}} = U_a \cdot \omega \cdot C = 50 \times 10^6 \cdot 125 \cdot 10^{-11} = \mathbf{0,0625 \text{ A}}.$$

$$\tan \varphi = \omega C R = 10^6 \cdot 125 \cdot 10^{-11} \times 600 = \mathbf{0,75}.$$

Zonder, zoals op bovengenoemde wijze is aangegeven, de totaalstroom uit te rekenen met behulp van de impedantie, kunnen we I_t ook bepalen met behulp van I_R en I_C indien we bedenken dat:

$$I_t = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} \quad \text{dus} \quad I_t = \sqrt{0,083^2 + 0,0625^2} = 0,104 \text{ A.}$$

In het vectordiagram volgens fig. 2,9 stellen alle stroomvectoren het quotiënt voor van de aangelegde spanning $\hat{U}_a$ en de desbetreffende weerstand of schijnbare weerstand.

Door alle stroomvectoren te delen door $\hat{U}_a$, (de verhouding tussen de vectoren verandert hierdoor niet) verkrijgen we vectoren die de omgekeerde waarden van weerstand, reactantie en impedantie voorstellen (zie fig. 2,10). Uit dit vectordiagram komen we ook tot de omgekeerde waarde van de impedantie met behulp van de stelling van Pythagoras, nl. $\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}$.

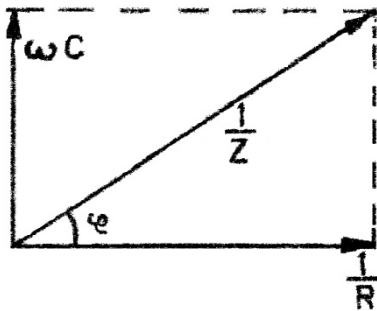


Fig. 2,10. Vectordiagram voorstellende admittantie van fig. 2,8.

De omgekeerde waarde van weerstand duiden we aan met de naam conductantie.

De omgekeerde waarde van reactantie met de naam susceptantie en de omgekeerde waarde van impedantie met de naam admittantie.

Bij de serieschakeling hebben we gezien, dat we de waarde van de impedantie kunnen bepalen door de wortel uit de som van de kwadraten van de weerstand en reactantie. Bij de parallelschakeling kunnen we de admittantie bepalen door de wortel uit de som van de kwadraten te nemen van de conductantie en susceptantie.

Voorbeeld: op een parallelschakeling van een condensator van 1000 pF en een weerstand van 2000 Ω is een spanning werkzaam met een amplitude van 500 V en een frequentie van 314000 Hz. Bereken de stromen in de takken en de totaalstroom.

Oplossing: De stroom door de weerstand is $\hat{I}_R = \frac{\hat{U}_R}{R} = \frac{500}{2000} = \frac{1}{4} \text{ A.}$

De stroom door de condensatortak is:

$$\hat{I}_C = \hat{U}_a \cdot \omega \cdot C = 500 \times 2\pi \cdot 314 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} = 500 \times 2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-9} = 1 \text{ A.}$$

De admittantie van de schakeling is:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^6} + (2\pi \cdot 314 \cdot 10^3)^2 \cdot 10^{-18}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^6} + (2 \cdot 10^6)^2 \cdot 10^{-18}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^6} + 4 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-18}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^6} + \frac{4}{10^6}} = \sqrt{\frac{1+16}{4 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{17}{4 \cdot 10^6}}.$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{4,12}{2 \cdot 10^3} \quad \text{dus:} \quad \hat{I}_t = \hat{U}_a \times \frac{1}{Z} = 500 \times \frac{4,12}{2 \times 10^3} = 1,03 \text{ A.}$$

$\tan \varphi$ is wederom te berekenen uit ωCR (zie fig. 2,9).

$$\tan \varphi = 2\pi \cdot 314 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^3 = 4$$

Te maken opgaven: nummers 25 t/m 31. Oplossingen inleveren.

2.5. Wisselspanning aangesloten op een zelfinductie

Tussen de klemmen van de zelfinductie in fig. 2,11 is een sinusvormige wisselspanning U_a aangesloten. Deze wisselspanning heeft een stroom door de zelfinductie tot gevolg. Daar dit een veranderlijke stroom is, zal deze een veranderlijk magnetische flux in de spoel veroorzaken. Deze veranderende magnetische flux heeft tot resultaat, dat in de spoel een emk van zelfinductie ontstaat. De richting van deze emk zal zodanig zijn, dat de aangelegde wisselspanning wordt tegengewerkt.

We stellen ons voor dat de weerstand van de draad, waaruit de spoel gewikkeld is, zo klein is, dat deze verwaarloosd mag worden.

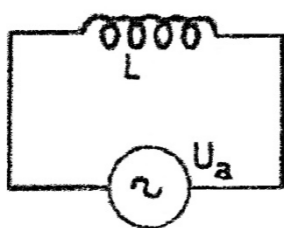


Fig. 2,11. Wisselspanning aangesloten op een zelfinductie.

We gaan uit van de gedachte dat in de spoel een sinusvormige wisselstroom optreedt, die in fig. 2,12 is weergegeven door de getrokken sinusoïde.

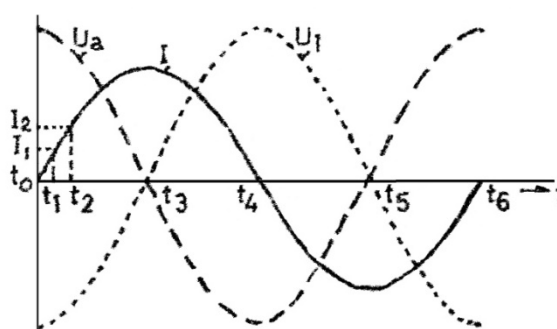


Fig. 2,12. Wisselspanning aangesloten op een zelfinductie.

Daar de fluxveranderingen verondersteld worden in fase te zijn met de stroomveranderingen, kunnen we de emk van zelfinductie afleiden uit de veranderingen van de stroom.

Op de tijdstippen t_3 en t_5 doorloopt de stroom en dus ook de flux de maximale waarde. We kunnen ons een zeer kort ogenblik de stroom constant denken. Op dit moment dus geen stroomverandering, dus ook geen emk van zelfinductie. Op de momenten t_3 en t_5 is de emk van zelfinductie dus nul.

Als de stroom van nul op het tijdstip t_0 gaat toenemen tot de waarde I_1 op tijdstip t_1 , ontstaat in de spoel een emk van zelfinductie. De stroomtoename gedurende het tijdvak t_1 en t_2 is kleiner dan de voorgaande, dus is ook de emk van zelfinductie kleiner. In gelijke tijdvakken na t_2 zal de stroom steeds minder toenemen en de emk van zelfinductie dus steeds kleiner worden, totdat de emk op het tijdstip t_3 gelijk nul wordt. Kiezen we de bovengenoemde tijdvakken zeer klein, dan komen we tot de conclusie dat de stroom het snelst verandert, als deze de minimumwaarde passeert, dus van nul tot een zeer kleine waarde aangroeit. De emk van zelfinductie is dus maximaal op het tijdstip t_0 .

Gedurende het tijdvak t_3 en t_4 gaat de stroom afnemen tot nul en zal sneller afnemen naarmate we dichterbij het tijdstip t_4 komen of zal sneller afnemen naarmate de stroom een kleinere waarde krijgt. Zo is de emk van zelfinductie op het tijdstip t_4 weer maximum. Ditzelfde geldt voor het tijdstip t_6 ,

Dus op de tijdstippen t_3 en t_5 is de emk van zelfinductie nul en op de tijdstippen t_0 , t_4 en t_6 maximaal.

22 R.T.

W.T.

Nadruk verboden

Bij het passeren van de tijdstippen t_3 en t_5 gaat de stroom van aangroeiende gedaante over in afnemende gedaante. De emk van zelfinductie zal op deze momenten dus moeten omkeren van richting.

In het tijdvak t_0 en t_3 neemt de stroom in positieve richting toe; de emk van zelfinductie zal dus in negatieve richting moeten werken (zie U_1 in fig. 2,12; gestippelde sinusöide). Gedurende het tijdvak t_3 en t_4 neemt de stroom in positieve richting af, dus moet de emk U_1 in dezelfde (positieve) richting werkzaam zijn. Een in negatieve richting toenemende stroom ontstaat in het tijdvak t_4 en t_5 . De emk U_1 is dus in positieve richting werkzaam om gedurende het tijdvak t_5 en t_6 weer in negatieve richting te gaan werken, daar nu de stroom in negatieve richting afneemt. We zien dus de emk van zelfinductie (U_1) ontstaan als een sinusöide, welke 90° na-ijlt op de stroom door de spoel. Indien in deze keten de stroom zal verlopen zoals we hebben aangegeven, dan zal deze emk van zelfinductie op elk moment opgeheven moeten worden door de aangelegde spanning. Immers de emk van zelfinductie heeft een zodanige richting, dat deze de oorzaak van zijn ontstaan, en dat is de aangelegde spanning, tegenwerkt. De aangelegde spanning U_a kan dus getekend worden door de sinusöide, welke in tegenfase is met U_1 . U_a is in fig. 2,12 weergegeven door de gestreepte sinusöide.

We zien nu dat de aangelegde spanning 90° voorijlt op de stroom, ofwel, de stroom ijlt 90° na op de aangelegde spanning.

Bij de zelfinductie ontstaat dus een faseverschuiving tegengesteld aan die bij de condensator. Het vectordiagram voor stroom en spanning bij een zelfinductie is in fig. 2,13 weergegeven.

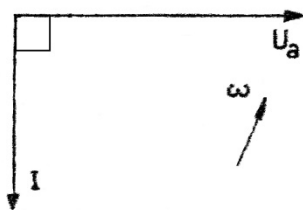


Fig. 2,13. Vectordiagram voor stroom en spanning bij een zelfinductie.

Indien we op een zelfinductie een wisselspanning aansluiten, treedt er dus een wisselstroom op. De waarde van deze wisselstroom is ook hier weer bepaald door de schijnbare weerstand of reactantie van de zelfinductie.

Deze reactantie is te berekenen uit $R_L = 2\pi fL$ of $R_L = \omega l \Omega$, waarin L uitgedrukt is in henry, f de frequentie of ω de cirkelfrequentie is van de aangesloten wisselspanning.

We zien dat de reactantie van een spoel evenredig is met de frequentie en met de zelfinductie. Naarmate de frequentie en de zelfinductie kleiner worden, wordt de reactantie ook kleiner. We zien tevens, dat de spoel voor gelijkstroom (frequentie is nul) een reactantie nul heeft. De reactantie van een spoel is dus onafhankelijk van de grootte van de stroom of de spanning. De faseverschuiving die een spoel tussen stroom en spanning veroorzaakt, is onafhankelijk van de frequentie of van de grootte van de zelfinductie, de stroom en de spanning, dus steeds 90° .

Is de momentele waarde van de aangelegde spanning gegeven, bv. $U_a = \hat{U}_a \sin \omega t$, dan is de momentele waarde van de stroom te bepalen; deze is dan: $I = \frac{\hat{U}_a}{\omega L} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$.

Te maken opgaven: nummers 32 t/m 39.
Oplossingen inleveren.

2.6. Wisselspanning aangesloten op een serieschakeling van zelfinductie en weerstand.

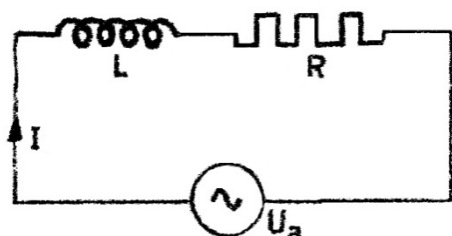


Fig. 2,14. Wisselspanning aangesloten op een serieschakeling van spoel en weerstand.

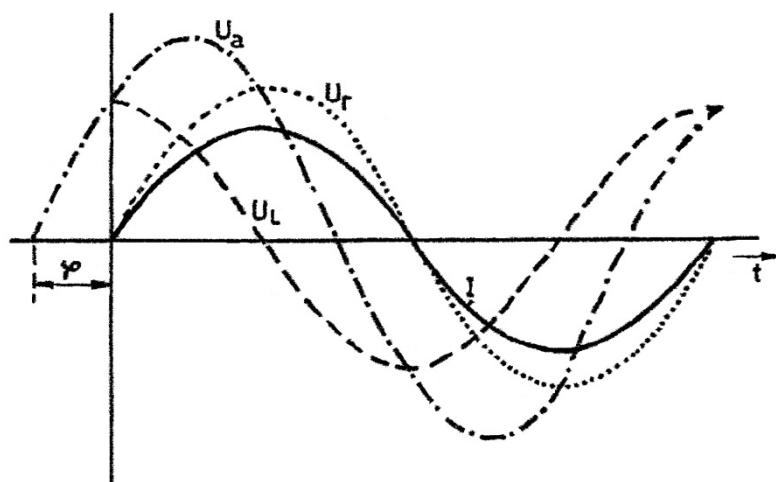


Fig. 2,15. Stroom en spanningen als functie van de tijd voor de schakeling volgens fig. 2,14.

Ten gevolge van het aansluiten van een wisselspanning op de schakeling volgens fig. 2,14 zal in de keten een wisselstroom optreden.

In fig. 2,15 is de in de keten optredende stroom door een getrokken lijn weergegeven. Deze stroom heeft over de weerstand een spanning U_R tot gevolg, welke in fase is met de stroom. (Een weerstand veroorzaakt faseverschuiving van 0° .) Zie in fig. 2,15 de gestippelde kromme.

Over de zelfinductie ontstaat een spanning, welke 90° voorijlt ten opzichte van de stroom en die in fig. 2,15 is weergegeven door een gestreepte kromme.

We kunnen het verloop van U_a vastleggen door op elk moment de som te nemen van de momentele waarden van U_R en U_L , indien deze spanningen dezelfde richting hebben. Als deze spanningen U_R en U_L tegengestelde richtingen hebben, vinden we de momentele waarde van U_a uit het verschil van de momentele waarden van U_R en U_L . We moeten hierbij bedenken, dat op elk moment de aangelegde spanning gelijk moet zijn aan het totaal aan spanning dat over L en R staat.

In fig. 2,15 is U_a weergegeven door de streep-stiplijn. Deze spanning ijlt nu een hoek φ vóór op de stroom in de keten.

Om voor de schakeling volgens fig. 2,14 een vectordiagram te ontwikkelen, plaatsen we eerst weer de vector welke de stroom voorstelt (zie fig. 2,16). De vector voor de spanning over de weerstand valt samen met de stroom, want de fase tussen deze grootheden is nul.

De spanning U_L over de spoel wordt een hoek van 90° voorijlend ten opzichte van de stroom uitgezet. De aangelegde spanning U_a is nu weer te construeren door de diagonaal te tekenen in de rechthoek welke met U_R en U_L gevormd wordt. We zien hier de aangelegde spanning een hoek φ voorijlen op I . Bedenken we, dat de stippellijn, welke de uiteinden van U_a en U_R verbindt, gelijk is aan U_L , dan is met behulp van de stelling van Pythagoras weer gemakkelijk in te zien, dat het volgende verband tussen de voorkomende wisselspanningen bestaat:

$$U_a^2 = U_R^2 + U_L^2.$$

24 R.T.

W.T.

Nadruk verboden

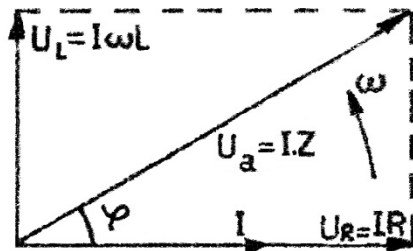


fig. 2,16. Vectordiagram voor de schakeling volgens fig. 2,14.

aanliggende rechthoekszijde in de driehoek, gevormd door U_a , U_L en U_R dus:

$$\tan \varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{I \times \omega L}{I \times R} = \frac{\omega L}{R}.$$

De cosinus van hoek φ is bepaald door de aanliggende rechthoekszijde, te delen door de hypotenusa.

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U_a} = \frac{I \times R}{I \times Z} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

In fig. 2,16 kunnen we alle spanningsvectoren weer door I delen (zonder de verhouding tussen de vectoren te schaden). We krijgen nu het vectordiagram volgens fig. 2,17. Dit diagram houdt de vectoren in welke de weerstand R , de

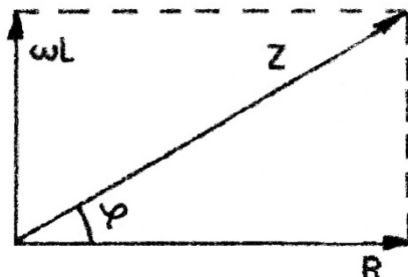


Fig. 2,17. Vectordiagram voor de impedantie van fig. 2,14.

stroom van 0,2 A. De faseverschuiving welke de keten veroorzaakt, is zodanig dat $\cos \varphi = 0,8$, $L = 150 \mu H$, $R = 400 \Omega$. Bereken ω , U_R , U_L en U_a .

Oplossing: Met behulp van $\cos \varphi$ is te bepalen hoe groot ω is. Daartoe brengen we de gegeven $\cos \varphi$ in een driehoek in tekening, waarin de aanliggende zijde van hoek φ op 8 en de hypotenusa op 10 gesteld wordt (zie fig. 2,18). Met behulp van de stelling van Pythagoras is de overstaande rechthoekszijde te bepalen:

$$10^2 = x^2 + 8^2, \quad 100 - 64 = x^2, \quad x = 6.$$

Hieruit volgt, dat $\tan \varphi = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. We weten: $\tan \varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{3}{4}$.

$$\text{Dus } \omega = \frac{3R}{4L} = \frac{3 \times 400}{4 \times 150 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^6.$$

Daar $U_R = I \times R$ en $U_L = I \times \omega L$ gaat deze vorm over in:

$$U_a^2 = I^2 \times R^2 + I^2 \times \omega^2 L^2.$$

Deling door I^2 geeft:

$$\frac{U_a^2}{I^2} = R^2 + \omega^2 L^2,$$

en na worteltrekking:

$$\frac{U_a}{I} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Het quotiënt $\frac{U_a}{I}$ geeft de impedantie Z van de serieschakeling van een zelfinductie en een weerstand:

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

De tangens van de hoek φ is weer bepaald door de verhouding van de overstaande en

reactantie ωL en impedantie Z voorstellen. Ook uit dit diagram kunnen we de grootte, welke we hierboven hebben bepaald, afleiden.

Is de aangelegde spanning in fig. 2,14 gegeven door: $U_a = \hat{U}_a \sin \omega t$, dan is de stroom door de keten als volgt uit te drukken:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

In deze uitdrukking stelt $\frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ de amplitude van de stroom voor en de stroom ijlt na op de aangelegde spanning.

Voorbeeld: Door een serieschakeling van een zelfinductie en een weerstand vloeit een

Te maken opgaven: nummers 40 t/m 48. Oplossingen inleveren.

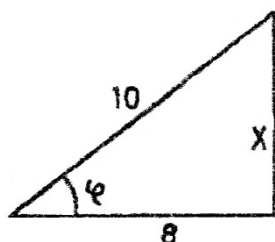


Fig. 2,18. Bepaling $\tan \varphi$ uit $\cos \varphi$.

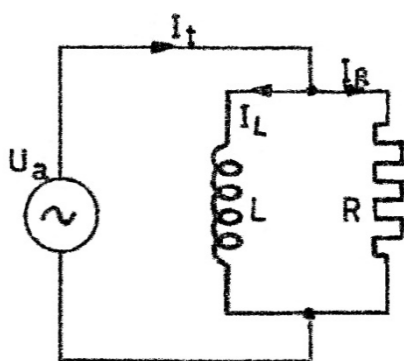


Fig. 2,19. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van L en R.

de stelling van Pythagoras uit de driehoek, gevormd door I_t , I_R en I_L te berekenen. $I_t^2 = I_R^2 + I_L^2$.

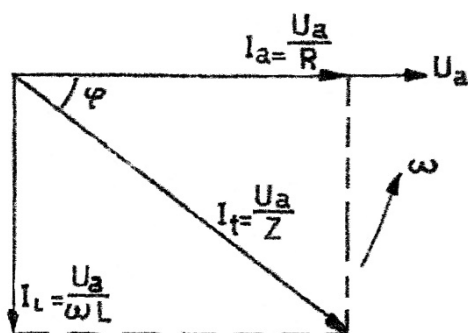


Fig. 2,20. Vectordiagram voor fig. 2,19

De spanning over de weerstand is $U_R = I \times R = 0,2 \times 400 = 80 \text{ V}$.

De spanning over de spoel is $U_L = I \times \omega L = 0,2 \times 2 \cdot 10^6 \cdot 150 \cdot 10^{-6} = U_L = 60 \text{ V}$.

De aangelegde spanning is dus:

$$U_a = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{6400 + 3600} = 100 \text{ V}.$$

2,7. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie en weerstand.

De aan de keten toegevoerde stroom I_t splitst zich in twee delen, nl.: I_L door de spoel en I_R door de weerstand (fig. 2,19).

Op de spoel en op de weerstand is dezelfde spanning nl. U_a werkzaam.

We plaatsen de vector, welke de spanning U_a voorstelt, horizontaal in fig. 2,20. De stroom door de weerstand kan nu door een vector voorgesteld worden, welke samenvalt met de aangelegde spanning, daar deze stroom in fase met de spanning is.

De vector, welke de stroom door de spoel aangeeft, moet een hoek van 90° maken met de aangelegde spanning. Deze stroom ijlt 90° na op de spanning U_a .

Uit de beide vectoren I_L en I_R kan nu met behulp van een rechthoek op deze beide stromen, de totaalstroom I_t afgeleid worden. I_t wordt weer voorgesteld door de diagonaal in deze rechthoek en is met

De stroom door de weerstand is $I_R = \frac{U_a}{R}$ en de stroom door de spoel is $I_L = \frac{U_a}{\omega L}$. Dit gesubstitueerd in de uitdrukking voor I_t geeft:

$$I_t^2 = \frac{U_a^2}{R^2} + \frac{U_a^2}{\omega^2 L^2}.$$

Deling aan beide zijden van het = -teken geeft:

$$\frac{I_t^2}{U_a^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}$$

en na worteltrekking:

$$\frac{I_t}{U_a} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}.$$

Het quotiënt $\frac{I_t}{U_a}$ stelt de omgekeerde waarde voor van de impedantie; dus:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}.$$

26 R.T.

W.T.

Nadruk verboden

De beide termen onder het wortelteken een gelijknamige noemer geven, brengt:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2 + R^2}{\omega^2 L^2 R^2}}.$$

De impedantie is nu:

$$Z = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2 R^2}{\omega^2 L^2 + R^2}} = \frac{\omega L R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}.$$

De tangens van hoek φ is nu volgens fig. 2,20:

$$\tan \varphi = \frac{I_L}{I_R} = \frac{\frac{U_a}{\omega L}}{\frac{U_a}{R}} = \frac{R}{\omega L}.$$

De cosinus van hoek φ is:

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I_t} = \frac{\frac{U_a}{R}}{\frac{U_a}{Z}} = \frac{Z}{R} = \frac{\frac{\omega L R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}}{R} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Stellen we de aangelegde spanning wederom voor door $U_a = \hat{U}_a \sin \omega t$, dan is de totaalstroom:

$$I_t = \frac{\hat{U}_a}{\frac{\omega L R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}} \sin(\omega t - \varphi) = \hat{U}_a \frac{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}{\omega L R} \sin(\omega t - \varphi).$$

In deze uitdrukking is: $\frac{\hat{U}_a}{\frac{\omega L R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}} = \hat{U}_a \frac{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}{\omega L R}$ de amplitude van de totaalstroom.

In deze uitdrukking voor de amplitude van de stroom is:

$\frac{\omega L R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$ de impedantie en $\frac{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}{\omega L R}$ de admittantie van de schakeling.

Voorbeeld: Voor de schakeling volgens fig. 2,19 is gegeven:

$\omega = 2 \cdot 10^6$, $L = 300 \mu H$, $R = 300 \Omega$ en $I_L = 0,2 A$

Bereken: U_a , I_R , I_t en $\tan \varphi$.

Oplossing:

Indien we de spanning over de spoel uitrekenen, hebben we tevens de aangelegde spanning:

$$U_a = I_L \times \omega L = 0,2 \times 2 \cdot 10^6 \times 300 \cdot 10^{-6} = \mathbf{120 V}.$$

De stroom door de weerstand is nu:

$$I_R = \frac{U_a}{R} = \frac{120}{300} = \mathbf{0,4 A}.$$

De totaalstroom is bepaald door:

$$I_t = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,2^2} = \sqrt{0,16 + 0,04} = \sqrt{0,20} = \mathbf{0,446 A}.$$

$$\tan \varphi = \frac{I_L}{I_R} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{1}{2}.$$

Te maken: nummers 49 t/m 53. Oplossingen inleveren.

2.8. Serieschakeling van spoelen

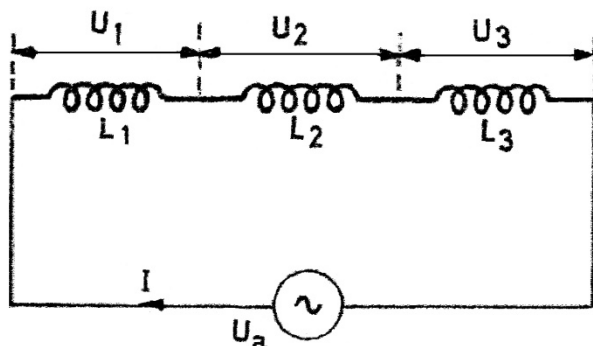


Fig. 2,21. Serieschakeling van drie spoelen

Indien we enige spoelen in serie schakelen, zal de door de keten gaande stroom spanningen over de spoelen ontwikkelen, welke alle 90° voorijlen op de stroom in de keten (fig. 2,21). Deze spanningen zijn achtereenvolgens:

$$U_1 = I\omega L_1, \quad U_2 = I\omega L_2, \quad U_3 = I\omega L_3.$$

Deze drie spanningen zijn dus onderling in fase, dus: $U_a = U_1 + U_2 + U_3$.

Noemen we de totale zelfinductie, die in de keten werkzaam is L_t , dan zal hiervoor gelden:

$$U_a = I\omega L_t.$$

Voor bovenvermeld verband tussen de

spanningen kunnen we schrijven: $I\omega L_t = I\omega L_1 + I\omega L_2 + I\omega L_3$.

Alle termen gedeeld door $I\omega$ geeft:

$$L_t = L_1 + L_2 + L_3.$$

De vervangingszelfinductie van enige in seriegeschakelde spoelen is dus gelijk aan de som van de geschakelde zelfinducties.

2.9. Parallelschakeling van spoelen

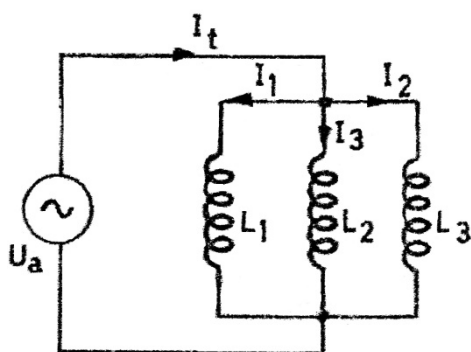


Fig. 2,22. Parallelschakeling van drie zelfinducties.

In fig. 2,22 zijn drie parallel geschakelde spoelen getekend. Over elk der spoelen is de spanning U_a werkzaam.

De stromen door de spoelen zijn:

$$I_1 = \frac{U_a}{\omega L_1}, \quad I_2 = \frac{U_a}{\omega L_2}, \quad I_3 = \frac{U_a}{\omega L_3}.$$

Deze stromen zijn alle 90° verschoven t.o.v. de spanning U_a , dus onderling zijn deze stromen in fase.

Noemen we de totaal gevormde zelfinductie van de keten L_t dan geldt:

$$I_t = \frac{U_a}{\omega L_t}.$$

Voor de stromen kunnen we schrijven:

$$I_t = I_1 + I_2 + I_3. \quad \text{Dus:}$$

$$\frac{U_a}{\omega L_t} = \frac{U_a}{\omega L_1} + \frac{U_a}{\omega L_2} + \frac{U_a}{\omega L_3}.$$

Alle termen gedeeld door U_a en vermenigvuldigd met ω geeft:

$$\frac{1}{L_t} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}.$$

De omgekeerde waarde van de vervangingszelfinductie van enige parallel geschakelde spoelen is dus bepaald door de som van de omgekeerde waarden van de geschakelde zelfinducties.

2.10. Wisselspanning aangesloten op een condensator van weerstand, zelfinductie en condensator

a. Impedantie

in het voorgaande hebben we gezien, dat een weerstand geen faseverschuiving tussen wisselstroom en spanning ten gevolge heeft. Een condensator heeft een faseverschuiving van 90° tot

gevolg, waarbij de spanning na-ijlt op de stroom en een zelfinductie veroorzaakt een faseverschuiving, waarbij de spanning 90° voorijlt op de stroom. Bovengenoemde drie organen zijn in fig. 2,23 in serie geschakeld aangesloten op een wisselspanning. We gaan uit van de gedachte, dat een spanningsbron

U_a een stroom I door de keten veroorzaakt.

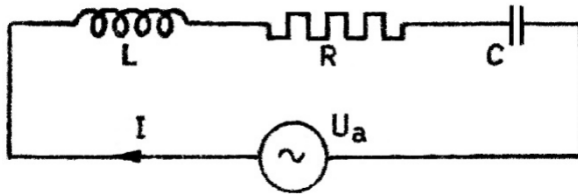


Fig. 2,23. Serieschakeling van zelfinductie, weerstand en condensator.

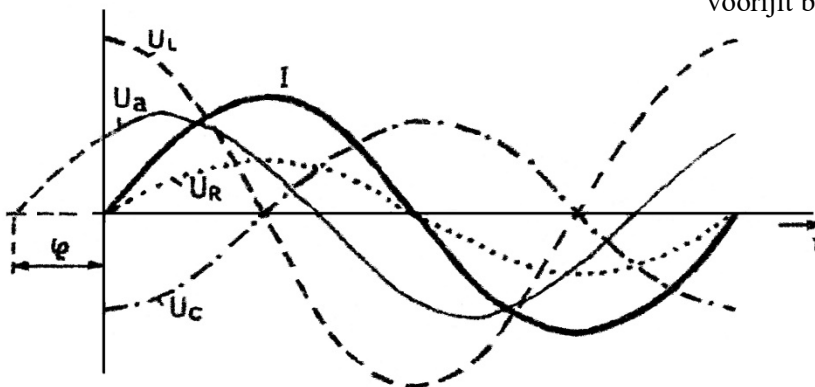


Fig. 2,24. Grafieken van stroom en spanningen in schema fig. 2,23.

In fig. 2,24 is deze stroom door een getrokken lijn weergegeven. Daardoor ontstaat een spanning U_R over de weerstand. Deze spanning is in fase met de stroom I en is in de figuur door een stippe lijn weergegeven.

Verder heeft de stroom een spanning U_L over de zelfinductie tot gevolg, welke 90° voorijlt bij de stroom (in fig. 2,24 de gestreepte lijn) en tenslotte een spanning U_C over de condensator, welke 90° na-ijlt op de stroom I (zie de streepstip-lijn).

Deze drie spanningen zijn de spanningen welke nodig zijn om de, in den beginne aangenomen stroom, door de desbetreffende onderdelen van de schakeling te zenden.

De aangelegde spanning U_a moeten we in deze drie delen U_R , U_L en U_C verdeeld denken. We zien in fig. 2,24 nu, dat de spanningen U_L en U_C juist tegengesteld verlopen, ofwel 180° in fase verschoven zijn. De gezamenlijke waarde van deze spanningen is dus op elk moment gelijk aan het verschil van U_L en U_C .

De momentele waarde van de aangelegde spanning U_a kunnen we nu vinden door het verschil van U_L en U_C op te tellen bij de momentele waarde van de spanning U_R over de weerstand (dun getrokken lijn in fig. 2,24).

In de figuur zien we dat de aangelegde spanning een zekere hoek φ voorijlt op de stroom in de keten.

We zullen nu het gedrag van de keten volgens fig. 2,23 verder onderzoeken aan de hand van een vectordiagram.

In fig. 2,25 is de stroom in de keten door een horizontale vector I weergegeven. De spanning over de weerstand $U_R = I \times R$ kan nu door een vector, welke samenvalt met I , worden weergegeven. (De fase tussen U_R en I is gelijk nul.)

De spanning over de spoel U_L is door een vector voorgesteld welke 90° voorijlt ten opzichte van I , en de spanning over de condensator door een vector U_C welke 90° na-ijlt op I . Door nu U_L te verminderen met U_C vinden we de vector welke $U_L - U_C$ voorstelt. Deze vector, door middel van een

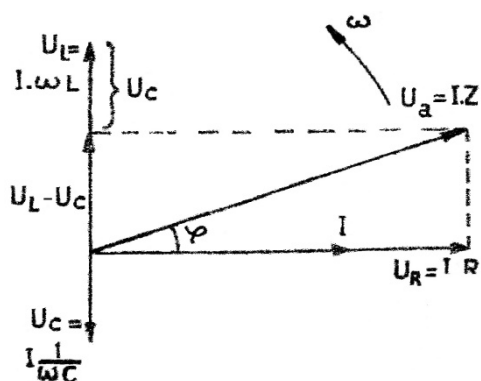


Fig. 2,25. Vectordiagram betreffende fig. 2,23 met inductief gedrag.

geeft:

$$Z^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \text{ en na worteltrekking:}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Deze uitdrukking geeft dus de impedantie weer van de serieschakeling van zelfinductie, weerstand en condensator. We kunnen uit deze uitdrukking ook duidelijk constateren dat de invloed van de zelfinductie in de keten tegengewerkt wordt door de condensator. De impedantie van een keten met serieschakeling van spoel, condensator en weerstand, is dus kleiner dan de impedantie van een keten welke alléén bestaat uit de serieschakeling van spoel en weerstand, indien de condensatorreactantie kleiner is dan $2 \times$ de reactantie van de spoel. Ook zouden we kunnen zeggen: de impedantie van een serieschakeling van een spoel, condensator en weerstand, is dus kleiner dan de impedantie van een serieschakeling van condensator en weerstand, indien de reactantie van de spoel kleiner is dan $2 \times$ de reactantie van de condensator. De faseverschuiving, welke ontstaat tussen de aangelegde spanning en de stroom in de keten, is weer bepaald door de tangens van hoek φ in de rechthoekige driehoek gevormd door U_R , $U_L - U_C$ en U_a .

$$\tan \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{I\omega L - I\frac{1}{\omega C}}{IR} = \tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

De hoek van faseverschuiving kan ook bepaald worden door de cosinus van hoek φ .

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U_a} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Bij voorgaande beschouwingen hebben we verondersteld, dat de spanning over de spoel groter is dan de spanning over de condensator. De spanning over de zelfinductie overheerst dus op de spanning over de condensator. In het vectordiagram volgens fig. 2,25 blijkt ook de vector $U_L - U_C$ 90° voor te

rechthoek samengesteld met U_R , stelt ons in staat de diagonaal te tekenen welke de aangelegde spanning U_a voorstelt. De spanning U_a ijlt volgens de figuur een hoek φ voor op I .

Uit de rechthoekige driehoek gevormd door de vectoren $U_L - U_C$ en U_R met de vector U_a volgt met behulp van de stelling van Pythagoras:

$$U_a^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2.$$

Daar $U_a = IZ$, $U_R = IR$, $U_L = I\omega L$ en $U_C = I\frac{1}{\omega C}$, wordt de verkregen uitdrukking voor de spanning:

$$I^2 Z^2 = I^2 R^2 + \left(I\omega L - I\frac{1}{\omega C}\right)^2 \text{ of}$$

$$I^2 Z^2 = I^2 R^2 + I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \text{ en}$$

$$I^2 Z^2 = I^2 \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \right\}.$$

Beide zijden van het =-teken delen door I^2

ijlen op I en derhalve ijlt ook U_a voor op I en wel met een hoek φ . De zelfinductie heeft dus een grotere invloed in de keten dan de condensator. De keten gedraagt zich inductief. Omgekeerd kunnen we dus ook zeggen: in een keten waarin de zelfinductie overheerst, ijlt de aangelegde spanning vóór op de stroom.

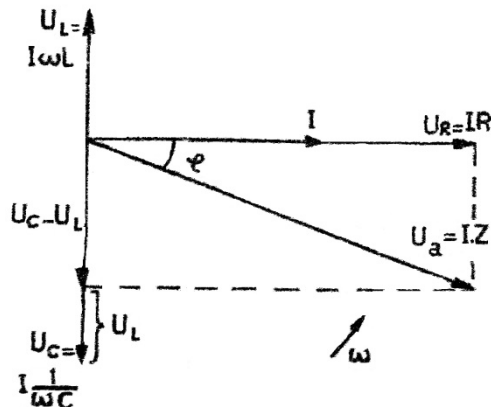


Fig. 2,26. Vectordiagram betreffende fig. 2,23 met capacitief gedrag.

Gaan we uit van de gedachte dat de spanning over de condensator groter is dan de spanning over de zelfinductie, dan verkrijgen we het vectordiagram volgens fig. 2,26.

Het verschil tussen de spanning over de zelfinductie en die over de condensator levert nu een vector op welke 90° na-ijlt op de stroom. De condensator overheerst in de keten. De keten gedraagt zich nu capacitief.

In een keten waarin de capaciteit overheerst, ijlt de aangelegde spanning na op de stroom in de keten.

Voor de impedantie van de keten vinden we dezelfde vorm als in het voorgaande. De lezer ga dit zelf na.

De hoek van faseverschuiving wordt eveneens door dezelfde uitdrukking voor $\tan \varphi$ en $\cos \varphi$ bepaald. Alleen geeft de uitdrukking voor $\tan \varphi$ nu een negatieve waarde, waardoor wordt aangegeven dat de spanning nu na-ijlt op de stroom.

Is de momentele waarde van de aangelegde spanning gegeven door $U_a = \hat{U}_a \sin \omega t$, dan zijn de momentele waarden van de overige spanningen aan te duiden door:

$$\begin{aligned} U_R &= \hat{I}R \sin \omega t, \\ U_L &= \hat{I}\omega L \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ en} \\ U_C &= \hat{I} \frac{1}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

De uitdrukking voor de stroom is nu:

$$I = \frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

In deze laatste uitdrukking kan φ zowel positief als negatief zijn; afhankelijk van het feit of de keten zich inductief of capacitief gedraagt.



2.10. Wisselspanning aangesloten op een serieschakeling (vervolg)

b. Faseresonantie

In het voorgaande is reeds waargenomen dat in de serieschakeling volgens fig. 2,23 de invloed van de condensator de invloed van de zelfinductie tegenwerkt of omgekeerd.

We willen nu het geval eens onder ogen nemen dat de invloed van de zelfinductie juist even groot is als die der condensator. In dit geval moet dus U_L gelijk aan U_C zijn, of $\omega L = \frac{1}{\omega C}$.

Daar nu $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, wordt dus de impedantie van de keten gelijk aan R , hetgeen wil zeggen dat de keten geen faseverschuiving tussen stroom en aangelegde spanning veroorzaakt en dat de impedantie de kleinst mogelijke waarde heeft aangenomen. Uit dit laatste volgt eveneens dat de stroom, welke nu te berekenen is uit $I = \frac{\hat{U}_a}{R}$, haar maximumwaarde heeft verkregen.

Het geval waarbij in een dergelijke keten de stroom in fase met de aangelegde spanning is, wordt faseresonantie of korter resonantie genoemd.

Om dus faseresonantie voor de keten volgens fig. 2,23 te verkrijgen, is het nodig dat $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Gaan we uit van de gedachte dat de keten bestaat uit een bepaalde zelfinductie en capaciteit, dan is faseresonantie te verkrijgen door de frequentie van de aangelegde spanning een zodanige waarde te geven dat $\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$. Door de beide zijden van het = -teken te delen door L en te vermenigvuldigen met ω_r verkrijgen we: $\omega_r^2 = \frac{1}{LC}$ en na worteltrekking: $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Daar $\omega_r = 2\pi f_r$ krijgen we na deling door 2π :

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

De formule geeft ons dus de frequentie waarbij faseresonantie optreedt. Deze formule duidt men wel aan met de naam: formule van Thomson en de frequentie met de naam: faseresonantiefrequentie.

We kunnen ons ook het geval voorstellen dat de aangelegde spanning een bepaalde frequentie heeft en de keten een bepaalde zelfinductie en een veranderlijke condensator bezit. Door de condensator nu zo te veranderen dat weer voldaan wordt aan $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, kunnen we ook voor resonantie zorgdragen.

De hiervoor benodigde capaciteit van de condensator is nu te berekenen uit:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Vermenigvuldigen aan beide zijden van het = -teken geeft:

$$\frac{1}{C} = \omega^2 L.$$

Omkering van beide leden van deze gelijkheid geeft:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Met deze waarde van C hebben we de keten dus in resonantie gebracht bij de frequentie ω .

Is echter de zelfinductie in de keten veranderlijk en hebben de capaciteit van de condensator en de frequentie van de aangelegde spanning een bepaalde waarde, dan kunnen we door de zelfinductie te wijzigen de keten ook in resonantie brengen.

32 R.T.

W.T.

Nadruk verboden

Ook nu moet weer voldaan worden aan $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Door beide leden te delen door ω , vinden we $L = \frac{1}{\omega^2 C}$, hetgeen de benodigde zelfinductie geeft om met de gegeven capaciteit en frequentie resonantie tot stand te brengen.

Voorbeeld: Een serieschakeling bestaat uit een zelfinductie van $1000 \mu H$, een capaciteit van $2500 pF$ en een weerstand van 800Ω .

Bereken de impedantie van deze keten voor een cirkelfrequentie $\omega_1 = 10^6$ en voor een cirkelfrequentie $\omega_2 = 5 \cdot 10^5$. bereken in beide gevallen ook de tangens van de hoek van faseverschuiving.

Eveneens wordt gevraagd te berekenen de frequentie waarbij de keten resonantie vertoont.

Oplossing: De impedantie van de keten voor de frequentie ω_1 is te berekenen uit:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}. \quad \text{De gegeven getalwaarden hierin gesubstitueerd geeft:} \\ Z_1 &= \sqrt{(800)^2 + \left(10^6 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-10}}\right)^2}. \\ Z_1 &= \sqrt{64 \cdot 10^4 + (10^3 - 400)^2} = \sqrt{64 \cdot 10^4 + 36 \cdot 10^4}. \quad Z_1 = \sqrt{10^6} = \mathbf{1000 \Omega}. \end{aligned}$$

De impedantie wordt voor ω_2 :

$$\begin{aligned} Z_2 &= \sqrt{64 \cdot 10^4 + \left(5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{5 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-10}}\right)^2}. \\ Z_2 &= \sqrt{64 \cdot 10^4 + (500 - 800)^2} = \sqrt{64 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^4}. \quad Z_2 = \sqrt{73 \cdot 10^4} = \mathbf{858 \Omega}. \end{aligned}$$

$$\text{Voor de frequentie } \omega_1 \text{ is } \tan \varphi = \frac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R} = \frac{10^3 - 400}{800} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Voor de frequentie } \omega_2 \text{ is } \tan \varphi = \frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R} = \frac{500 - 800}{600} = \frac{1}{2}.$$

De resonantiefrequentie is te berekenen uit:

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ of beide leden gekwadeerd:} \\ f_r^2 &= \frac{1}{40LC} = \frac{1}{40 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-10}} = \frac{1}{10^{-10}} = 10^{10} \quad f_r = \mathbf{10^5 Hz}. \end{aligned}$$

Voorbeeld: Een serieschakeling van een weerstand R van 100Ω , een zelfinductie L van $500 \mu H$ en een condensator C_1 van $500 pF$ moet in resonantie worden gebracht voor een frequentie $f = 5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$. Hiertoe schakelt men nog een condensator C_2 in serie met C_1 . Hoe groot moet C_2 zijn?

Oplossing: De benodigde totale capaciteit welke de kring moet bezitten om voor $f = 5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ in resonantie te zijn is te berekenen uit $C_t = \frac{1}{\omega^2 L}$ of $C_t = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = \frac{1}{40 \cdot 25 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{5 \cdot 10^9} F = 200 pF$.

De beide in serie geschakelde condensatoren leveren een capaciteit welke bepaald is door:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_t} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \\ \frac{1}{200} &= \frac{1}{500} + \frac{1}{C_2}. \\ \frac{1}{C_2} &= \frac{1}{200} - \frac{1}{500} = \frac{5-2}{1000} = \frac{3}{1000}. \\ C_2 &= \frac{1000}{3} = \mathbf{333 \frac{1}{3} pF}. \end{aligned}$$

Te maken opgaven: Wt. Nummers 60 t/m 64. Oplossingen inleveren.

c. Kwaliteitsfactor of opslingerfactor

In het voorgaande hebben we reeds vermeld, dat de impedantie van de keten minimaal wordt indien de keten in resonantie is. De impedantie is dan gelijk aan de weerstand, welke in de keten is opgenomen.

Is op de keten een spanning U_a werkzaam met een frequentie gelijk aan de resonantiefrequentie dan zal ten gevolge van de minimum impedantie een maximum stroom optreden welke is $I_r = \frac{U_a}{R}$.

Deze stroom ontwikkelt een spanning over de condensator en een spanning over de zelfinductie welke elkaar opheffen. Over de spoel en de condensator tezamen valt dus geen spanning. Over de weerstand valt dus een spanning welke gelijk is aan de aangelegde spanning U_a . Ongeacht de grootte van de reactantie van spoel en condensator, met als voorwaarde dat ze gelijk zijn, valt over deze onderdelen samen geen spanning. Over de condensator alleen is echter wel een spanning aanwezig evenals over de zelfinductie.

De spanning over de zelfinductie is in resonantie bepaald door:

$$U_L = I_r \times \omega_r L = \frac{U_a}{R} \omega_r L = U_a \frac{\omega_r L}{R} \quad \text{of} \quad \frac{U_L}{U_a} = \frac{\omega_r L}{R}.$$

De verhouding $\frac{U_L}{U_a}$ noemt men de opslingerfactor of kwaliteitsfactor Q van de keten, dus:

$Q = \frac{\omega_r L}{R}$. De opslingerfactor kunnen we ook uitdrukken in de capaciteit van de condensator.

$$U_C = I_r \frac{1}{\omega_r C} = \frac{U_a}{R} \frac{1}{\omega_r C} = U_a \frac{1}{\omega_r C R} \quad \text{of} \quad \frac{U_C}{U_a} = \frac{1}{\omega_r C R}.$$

Daar de spanningen U_L en U_C gelijk zijn, kunnen we dus ook schrijven:

$$Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R}.$$

Is de resonantiefrequentie niet bekend, dan kunnen we de kwaliteitsfactor ook berekenen uit de grootheden van de keten.

Hier toe vullen we in $Q = \frac{\omega_r L}{R}$ voor $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ in. We verkrijgen dan:

$$Q = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Voorbeeld: Op een serieschakeling van zelfinductie $L = 450 \mu H$, capaciteit $C = 1250 pF$ en een weerstand $R = 10 \Omega$ wordt een wisselspanning van 2 volt met een cirkelfrequentie $\omega = 10^6$ aangesloten,

Bereken de spanning over de weerstand, capaciteit en zelfinductie.

Bereken de resonantiefrequentie en bepaal wederom de spanning over de weerstand, condensator en zelfinductie. Hoe groot is de opslingerfactor?

Oplossing: De impedantie van de schakeling is:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{100 + \left(10^6 \cdot 450 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{10^6 \cdot 1250 \cdot 10^{-12}}\right)^2}.$$

$$Z = \sqrt{100 + (450 - 800)^2} = \sqrt{100 + 350^2} = \sqrt{122600} = 350 \Omega.$$

De stroom in de keten is $I = \frac{U_a}{Z} = \frac{2}{350} = \frac{1}{175} A$.

De spanning over de weerstand is $U_R = I \times R = \frac{1}{175} \times 10 = \frac{10}{175} = \frac{2}{35} \text{ volt}$.

De spanning over de capaciteit is $U_C = I \times \frac{1}{\omega C}$.

$$U_C = \frac{1}{175} \times \frac{1}{10^6 \cdot 1250 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{175} \times 800 = \frac{32}{7} = 4 \frac{4}{7} \text{ volt}.$$

De spanning over de zelfinductie is $U_L = I \times \omega L$.

$$U_L = \frac{1}{175} \times 10^6 \cdot 450 \cdot 10^{-6} = \frac{450}{175} = \frac{18}{7} = 2 \frac{4}{7} \text{ volt}.$$

34 R.T.

W.T.

Nadruk verboden

De resonantiefrequentie is $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{450 \cdot 10^6 \cdot 1250 \cdot 10^{-12}}}$.

$$\omega_r = \sqrt{\frac{10^{18}}{450 \cdot 1250}} = \sqrt{\frac{10^{18}}{562500}} = \frac{10^9}{750} = \frac{4 \cdot 10^6}{3}.$$

De stroom bij de resonantiefrequentie is $I_r = \frac{U_a}{R} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ A}$.

De spanning over de weerstand is nu $U_R = U_a = \mathbf{2 \text{ volt}}$. De spanning over de zelfinductie en dus tevens de spanning over de condensator is

$$U_L = U_C = I_r \times \omega_r L. \quad U_L = U_C = \frac{1}{5} \times \frac{4 \cdot 10^6}{3} \cdot 450 \cdot 10^6 = \mathbf{120 \text{ volt}}.$$

De opslingerfactor is dus: $Q = \frac{U_L}{U_a} = \frac{120}{2} = \mathbf{60}$.

Dit laatste antwoord hadden we natuurlijk ook kunnen vinden door deze direct uit de vorm $Q = \frac{\omega_r L}{R}$ te berekenen.

d. Het gedrag van de keten bij verschillende frequenties

Is op de serieschakeling van $L_1 C$ en R een spanning met de resonantiefrequentie werkzaam, dan gedraagt de keten zich alsof deze alléén bestaat uit een weerstand. immers de zelfinductie en capaciteit heffen elkaar op. Is op de keten een frequentie werkzaam welke niet gelijk is aan de resonantiefrequentie, dan wordt de invloed van de capaciteit niet opgeheven door de zelfinductie.

Welke van de beide reactanties overheerst, wordt nu bepaald door het feit of de frequentie hoger of lager is dan de resonantiefrequentie. Gaan we weer uit van het geval dat de resonantiefrequentie werkzaam is, dan is $\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0$. Voor een frequentie hoger dan de resonantiefrequentie wordt ωL groter dan $\omega_r L$ en $\frac{1}{\omega_r C}$ kleiner dan $\frac{1}{\omega C}$. De zelfinductie heeft nu een grotere reactantie van de capaciteit en zal nu overheersen in de keten.

In de keten kunnen we nu dus werkzaam denken een reactantie van een zelfinductie L_v welke bepaald is door $\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega L_v$.

Door beide leden te delen door ω vinden we de zelfinductie die nu in serie met de weerstand werkzaam gedacht kan worden. Dus:

$L_v = L - \frac{1}{\omega^2 C}$. De keten gedraagt zich nu inductief en zal de stroom na-ijlen op de aangelegde spanning. Voor de impedantie van de keten kunnen we dus een frequentie, hoger dan de resonantiefre-

quentie, schrijven $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L_v^2}$.

Is de werkzame frequentie lager dan de resonantiefrequentie, dan zal de reactantie van de zelfinductie kleiner zijn dan in het resonantiegeval, terwijl de reactantie van de condensator groter zal zijn dan in geval van resonantie. De capaciteit heeft nu een grotere reactantie dan de zelfinductie en zal dus overheersen in de keten.

We kunnen dus werkzaam denken een reactantie van een capaciteit C_v welke bepaald is door:

$$\frac{1}{\omega C} - \omega L = \frac{1}{\omega C_v}.$$

Beide leden vermenigvuldigen met ω geeft:

$$\frac{1}{C} - \omega^2 L = \frac{1}{C_v}.$$

De termen voor het = -teken van gelijke noemer voorzien geeft:

$$\frac{1 - \omega^2 LC}{C} = \frac{1}{C_v}.$$

Te maken opgaven: Wt. nummers 65 t/m 67. Oplossingen inleveren.



Na omkering van beide leden van deze gelijkheid verkrijgen we de waarde van de capaciteit, welke nu in serie werkzaam gedacht kan worden met de weerstand

$$C_v = \frac{C}{1 - \omega^2 LC}.$$

De keten gedraagt zich capacitief; de stroom zal voorijlen op de aangelegde spanning. Voor frequenties lager dan de resonantiefrequentie kunnen we dus voor de impedantie schrijven:

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C_v^2}}.$$

Voorbeeld: Een weerstand van 100Ω , een condensator van 1000 pF en een zelfinductie van $800 \mu\text{H}$ zijn in serie geschakeld. Bereken de vervangingscapaciteit of zelfinductie van deze keten voor frequenties $\omega_1 = 10^6$ en $\omega_2 = 2 \cdot 10^6$.

Oplossing: We berekenen allereerst de resonantiefrequentie van de keten.

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9}}}.$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{80 \cdot 10^{-14}}} \approx \frac{1}{9 \cdot 10^{-7}} \approx 1,1 \cdot 10^6.$$

De frequentie ω_1 is dus lager dan de resonantiefrequentie; de keten gedraagt zich capacitief.

De vervangingscapaciteit is te berekenen uit:

$$C_v = \frac{C}{1 - \omega_1 LC} = \frac{10^{-9}}{1 - 10^{12} \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9}} = \frac{10^{-9}}{1 - 0,8} = \frac{10^{-9}}{0,2} = \mathbf{5000 \text{ pF}}.$$

We zien, dat deze vervangingscapaciteit groter is dan de geschakelde. Dit zal duidelijk zijn, als men bedenkt, dat de reactantie van de vervangingscondensator kleiner is dan de reactantie van de geschakelde condensator, dus de capaciteit moet groter zijn.

Voor de frequentie ω_2 gedraagt de keten zich inductief, want deze is hoger dan de resonantiefrequentie.

$$L_v = L - \frac{1}{\omega^2 C} = 8 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{4 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-9}}.$$

$$L_v = 8 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{4 \cdot 10^3} = 8 \cdot 10^{-4} - 25 \cdot 10^{-5} = \mathbf{650 \text{ H}}.$$

e. resonantiekromme

uit het feit, dat de stroom in het resonantiegeval maximaal is, volgt dat voor alle frequenties die niet gelijk zijn aan de resonantiefrequentie de stroom kleiner zal zijn. Dit is ook te concluderen uit de uitdrukkingen die we gevonden hebben voor de impedantie in 2,10d.

Voor steeds lagere waarden van de frequentie gaat de capaciteit meer en meer overheersen.

De waarde van de reactantie der vervangingscondensator wordt steeds groter, dus de impedantie steeds groter en de stroom steeds kleiner. Naarmate de frequentie meer af gaat wijken van de resonantiefrequentie wordt de stroom dus kleiner. Voor frequenties hoger dan de resonantiefrequentie zal de zelfinductie meer en meer gaan overheersen en dus de reactantie hiervan steeds groter worden.

De impedantie (zie 2,10d) zal dus ook groter worden naarmate de frequentie hoger wordt en de stroom dus kleiner.

Het gedrag van de keten als functie van de frequentie kunnen we het beste overzien als we een grafiek maken waarin de stroom als functie van de frequentie bij constante aangelegde spanning wordt uitgezet. Een dergelijke figuur wordt resonantiekromme genoemd.

In fig. 2,27 zijn enige resonantiekrommen voor een drietal schakelingen van L , C en R getekend. Om het mogelijk te maken op gemakkelijke wijze de eigenschappen van enige ketens, bestaande uit een serieschakeling van L , C en R , te vergelijken, tekenen we op de verticale as niet werkelijke stroom-

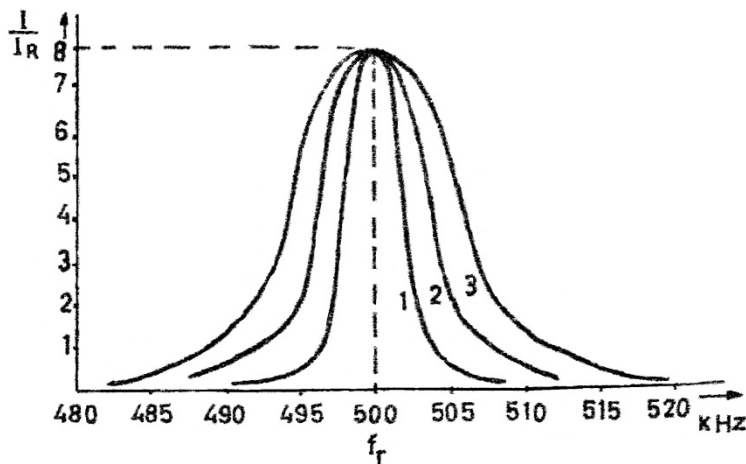


Fig. 2,27. Resonantiekrommen van drie ketens, bestaande uit serieschakeling van L , C en R bij gelijke R .

We nemen aan dat de stroom bij de resonantiefrequentie door 8 eenheden wordt weergegeven.

Verder bepalen we de stroom I bij andere frequenties en de verhouding $\frac{I}{I_r}$ tussen deze stroom en de stroom bij resonantie. De punten van de resonantiekromme bij een andere dan de resonantiefrequentie, vinden we nu, door de gevonden verhouding te vermenigvuldigen met de gekozen maat (8 eenheden) voor de stroom I_r .

We hebben in 2,10d gezien, dat de impedantie op te vatten is als bestaande uit een weerstand en een reactantie. De weerstandswaarde is onafhankelijk van de frequentie, de reactantie daarentegen sterk van de frequentie afhankelijk. Naarmate de weerstand kleiner is, zal de impedantie meer veranderen bij een frequentiewijziging. Bij frequentie- toe of -afname, uitgaande van de resonantiefrequentie, zal de impedantie sneller toe-, en de stroom dus sneller afnemen, naarmate de weerstand kleiner is. Bij kleine weerstand zal de resonantiekromme dus spitsiger moeten verlopen dan bij grote weerstand. Want in dit laatste geval is het van de frequentie onafhankelijke deel van de impedantie groter.

In fig. 2,27 zijn drie resonantiekrommen getekend, genummerd 1, 2 en 3, waarvan de keten, behorende bij kromme 1 de kleinste en de keten behorende bij kromme 3 de grootste weerstand bevat.

Zoals blijkt uit de figuur waren alle drie ketens op dezelfde resonantiefrequentie (500 kHz) afgestemd.

De stroomwaarden welke bij de resonantiefrequentie optreden, zijn in alle drie gevallen verschillend, echter steeds door 8 eenheden voorgesteld.

Deze 8 eenheden stellen in kromme 1 bv. een stroom van 80 mA, in kromme 2, 50 mA en in kromme 3, 30 mA voor.

We zien dat kromme 1 het sterkst reageert op een frequentieverandering. Of op kring 1 een spanning werkzaam is met de resonantiefrequentie, of een even grote spanning met een iets afwijkende frequentie, doet dus een groot verschil in stroomwaarde ontstaan. Bij 2 en 3 is dat verschil kleiner.

waarde op, maar de verhouding tussen de optredende stroom bij willekeurige frequentie en stroom bij de resonantiefrequentie. De stroom I_r , welke bij de gekozen waarde van de aangelegde spanning optreedt bij de resonantiefrequentie wordt allereerst bepaald.

Voor deze stroomwaarde, die we dus uitgedrukt vinden in ampère of mA, kiezen we een bepaalde schaal. Dus bv. 10 mA wordt in de tekening weergegeven door 1 cm.



Het is niet alleen de grootte van de weerstand welke invloed uitoefent op de vorm van de resonantiekromme. De grootte van de zelfinductie L en de capaciteit C hebben daar ook invloed op.

We gaan nu enkele serieschakelingen van L , C en R onderzoeken, welke alle dezelfde conductieve weerstand hebben, echte verschillende waarden van L en C . We kiezen de waarden van L en C zodanig, dat alle kringen op dezelfde resonantiefrequentie zijn afgestemd dus $\sqrt{LC}$ is voor alle kringen gelijk.

Beschouwen we eerst een keten die een grote zelfinductie L en kleine capaciteit C bezit. We moeten bedenken dat voor frequenties groter dan de resonantiefrequentie de vervangingszelfinductie groter is naarmate L groter is, nl. $L_v = L - \frac{1}{\omega^2 LC}$, dus is het van de frequentie afhankelijke gedeelte van de vervangingsimpedantie $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L_v^2}$ ook groter. De keten zal dus sterker op de frequentieverandering reageren dan in het geval dat de zelfinductie een kleinere waarde heeft. De flank van de resonantiekromme zal dus steiler verlopen. De kleine waarde van de capaciteit C zal ten gevolge hebben dat de vervangingscapaciteit voor frequenties kleiner dan de resonantiefrequentie ook een kleine waarde zal hebben ($C_v = \frac{C}{1 - \omega^2 LC}$). Bij een kleine waarde van C_v is echter de reactantie van de vervangingscapaciteit groter dan bij een grote waarde van C_v . De vervangingsimpedantie voor frequenties kleiner dan de resonantiefrequentie bezit nu weer een groot van de frequentie afhankelijk gedeelte en zal dus sterker reageren op een frequentieverandering dan indien C_v groot en dus $\frac{1}{\omega C_v}$ klein is. De resonantiekromme zal dus bij kleine C voor frequenties lager dan de resonantiefrequentie steiler verlopen, naarmate de capaciteit kleiner is. We zien hier dus uit dat de resonantiekromme een meer spits verloop zal hebben, naarmate L groter en C kleiner zijn gekozen. De verhouding $\frac{L}{C}$ is dus een belangrijk gegeven ten aanzien van het verloop van de resonantiekromme of ten aanzien van het gedrag van de keten. Om dus een serieketen van L , C en R te vormen, welke een scherpe resonantiekromme heeft, is het nodig R klein en $\frac{L}{C}$ groot te kiezen.

Bezien we nu nog even de kwaliteitsfactor of opslingerfactor $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, dan concluderen we dus dat een grote Q -factor samen gaat met een scherpe resonantiekromme.

In fig. 2,28 zijn drie resonantiekrommen getekend voor kringen met dezelfde weerstand, gelijke resonantiefrequentie en met verschillende waarden van L en C . Voor kromme 1 is $\frac{L}{C}$ het grootste en voor kromme 3 het kleinste.

Voorbeeld: Bereken de stroomverandering welke ontstaat te gevolge van een frequentieverandering van f_r tot $f_r = 5 \text{ kHz}$.

a. In een keten bestaande uit: $R = 10 \Omega$, $C = 400 \text{ pF}$ en $L = 1000 \mu\text{H}$.

b. In een keten bestaande uit: $R = 10 \Omega$, $C = 1000 \text{ pF}$ en $L = 400 \mu\text{H}$.

De aangesloten wisselspanning is 10 volt.

Oplossing: We bepalen eerst de resonantiefrequentie.

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{of} \quad f_r^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} = \frac{1}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-10}}$$

$$f_r^2 = \frac{1}{16 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^{12}}{16} \quad f_r = \frac{10^6}{4} = 25 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

Daar de producten LC in beide gevallen gelijk zijn, zijn dus de resonantiefrequenties voor beide ketens gelijk.

38 R.T.

W.T.

Nadruk verboden

De stroom welke in beide gevallen voor de resonantiefrequentie optreedt, is:

$$I_r = \frac{U_a}{R} = \frac{10}{10} = 1 \text{ A. De impedantie is bepaald door:}$$

a. $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$. De werkzame frequentie is nu $255 \cdot 10^3 \text{ Hz}$.

$$Z = \sqrt{100 + \left(2\pi \cdot 255 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{2\pi \cdot 255 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-10}}\right)^2}$$

$$Z = \sqrt{100 + \left(510\pi - \frac{10^7}{2040\pi}\right)^2} = \sqrt{100 + \left(510\pi - \frac{10^5\pi}{204}\right)^2} =$$

$$Z = \sqrt{100 + (510\pi - 490\pi)^2} = \sqrt{100 + (20\pi)^2} = \sqrt{100 + 4000}.$$

$$Z = \sqrt{4100} = 64 \Omega.$$

De stroom is nu $I = \frac{U_a}{Z} = \frac{10}{64} = \mathbf{0,156 \text{ A}}$.

De verandering van de stroom is $1 - 0,156 = \mathbf{0,844 \text{ A}}$.

b. $Z = \sqrt{100 + \left(2\pi \cdot 255 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{2\pi \cdot 255 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9}}\right)^2} =$

$$= \sqrt{100 + \left(204\pi - \frac{10^5}{51\pi}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{100 + (204\pi - 196\pi)^2} = \sqrt{100 + (8\pi)^2} = \sqrt{100 + 640}.$$

$$Z = \sqrt{740} = 27,2 \Omega.$$

De stroom is nu $I = \frac{U_a}{Z} = \frac{10}{27,2} = \mathbf{0,367 \text{ A}}$.

De verandering van de stroom is $1 - 0,367 = \mathbf{0,633 \text{ A}}$.

We zien hier ook uit dat de tweede keten minder sterk op de frequentieverandering reageert dan de eerste keten, hetgeen we te danken hebben aan de grotere waarde van $\frac{L}{C}$ voor de eerste kring.

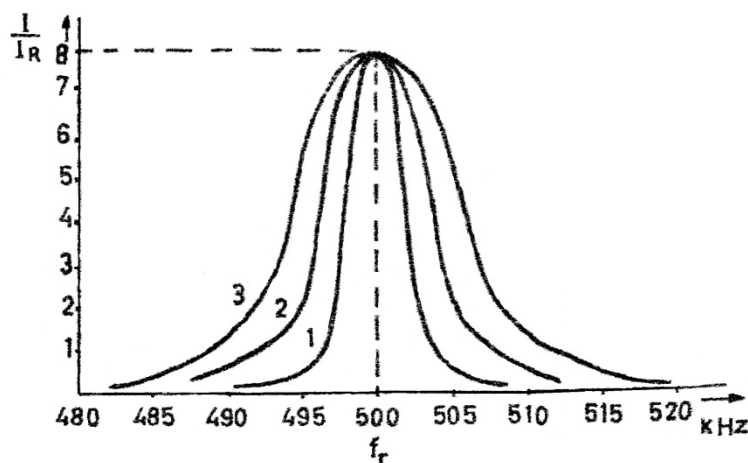


Fig. 2,28. Drie resonantiekrommen van serieschakeling L , C en R bij gelijke waarden van R en f_r en verschillende waarden van L en C .

Te maken opgaven: Wt. nummers 68 t/m 73. Oplossingen inleveren.

2.11. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie en Condensator

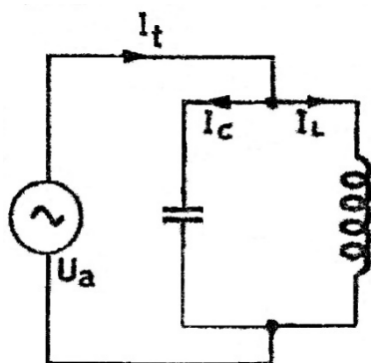


Fig.2,29. Parallelschakeling van zelfinductie en condensator.

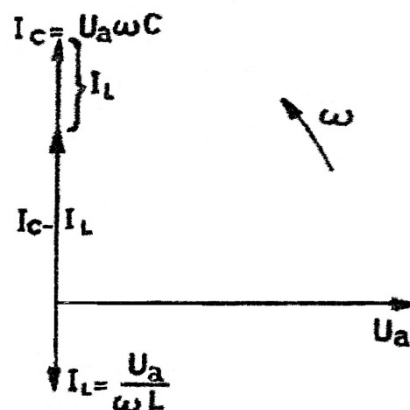


Fig. 2,30. Vectordiagram betreffende de de schakeling volgens fig. 2,29.

De schakeling welke we nu zullen behandelen is in fig. 2,29 weergegeven. De aangelegde spanning U_a veroorzaakt een stroom door de zelfinductie welke bepaald is door $I_L = \frac{U_a}{\omega L}$ en door de condensator een stroom $I_C = \frac{U_a}{\frac{1}{\omega C}} = U_a \omega C$.

De stroom I_L ijlt 90° na en de stroom I_C 90° vóór op de aangelegde spanning. In het vectordiagram volgens fig. 2,30 zijn U_a , I_C en I_L door vectoren weergegeven. We zien hier weer duidelijk dat de stromen I_C en I_L in tegenfase, of 180° in fase verschoven, verlopen.

De stroom, welke de krachtbron U_a moet leveren is nu bepaald door het verschil van I_C en I_L . Dus $I_t = I_C - I_L$ en zien we dat de totaalstroom I_t 90° voorijlt op de aangelegde spanning U_a . De schakeling gedraagt zich als een zuivere condensator. De reactantie van deze condensator is te berekenen uit:

$$I_t = I_C - I_L = U_a \omega C_v = U_a \omega C - \frac{U_a}{\omega L}.$$

Alle termen delen door U_a geeft:

$$\omega C_v = \omega C - \frac{1}{\omega L} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}.$$

Na omkering van beide leden vinden we:

$$\frac{1}{\omega C_v} = \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}.$$

Dit is dus tevens de totale impedantie welke deze keten oplevert.

In bovenstaand geval hebben we verondersteld dat de stroom I_C groter was dan de stroom I_L . We gaan nu uit van de veronderstelling dat de stroom I_C kleiner is dan I_L . Het zal duidelijk zijn dat de vector I_t die bepaald is door $I_L - I_C$ 90° na-ijlt op de spanning U_a . De keten gedraagt zich nu inductief en de reactantie van de vervangingszelfinductie L_v is nu te berekenen uit:

$$I_t = I_L - I_C \quad \text{of} \quad \frac{U_a}{\omega L_v} = \frac{U_a}{\omega L} - U_a \omega C.$$

Deling door U_a geeft:

$$\frac{1}{\omega L_v} = \frac{1}{\omega L} - \omega C \quad \text{of} \quad \frac{1}{\omega L_v} = \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega L}.$$

Dus:
$$\omega L_v = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$

40 R.T.

W.T.

Nadruk verboden

Dit is ook weer de totale impedantie welke door deze keten wordt gevormd,

Tenslotte kunnen we ons het geval voorstellen dat de stroom I_L gelijk is aan I_C .

Uit het vectordiagram blijkt dat de totaalstroom $I_t = 0$. Dit wil zeggen: hoewel de krachtbron U_a een spanning beschikbaar stelt, heeft deze geen stroom tot gevolg. De impedantie moet in dit geval oneindig groot zijn, immers $Z = \frac{U_a}{0} = \infty$.

De stromen I_L en I_C kunnen alleen gelijk zijn indien $\omega_L = \frac{1}{\omega C}$. Hieraan wordt voldaan bij de frequentie $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, de resonantiefrequentie van deze schakeling. We moeten hierbij bedenken dat een oneindig grote impedantie geen faseverschuiving ten gevolge kan hebben. Voor de resonantiefrequentie levert deze keten dus een maximum-impedantie; dit in tegenstelling met de serieschakeling van L , C en R .

Hierboven zijn we tot de conclusie gekomen, dat in het geval dat de aangelegde spanning een frequentie bezit gelijk aan de resonantiefrequentie van de keten, I_t gelijk aan nul is. door de zelfinductie en capaciteit treden echter wel stromen op; deze beide stromen zijn dan gelijk. Deze toestand doet zich voor enige tijd nadat de spanning U_a wordt ingeschakeld en zal zich gedurende het verdere verloop van de tijd ook handhaven. Direct na het inschakelen van U_a treden echter andere verschijnselen op, waarop we later nader zullen ingaan. Deze verschijnselen worden algemeen aangeduid met inschakelverschijnselen.

Voor frequenties groter dan de resonantiefrequentie is de reactantie van de condensator kleiner dan die van de zelfinductie. De stroom I_C zal dus groter zijn dan I_L . De keten gedraagt zich zoals we in het voorgaande hebben gezien capacitief. De vervangingscapaciteit is te vinden door de hierboven vermelde uitdrukking:

$$\omega C_v = \omega C - \frac{1}{\omega L} \text{ te delen door } \omega, \text{ dus: } C_v = C - \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Voor frequenties lager dan de resonantiefrequentie zal de stroom door de spoel groter zijn dan de stroom door de condensator. De keten gedraagt zich inductief. De waarde van de vervangingszelfinductie is nu te bepalen uit:

$$\omega L_v = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}. \text{ Deling door } \omega \text{ geeft: } L_v = \frac{L}{1 - \omega^2 LC},$$

Voorbeeld: Op een parallelschakeling van een zelfinductie van $400 \mu H$ en een condensator van $500 pF$ wordt een spanning U_a aan gesloten van $10 V$ met een frequentie $\omega = 2 \cdot 10^6$. Bereken de stroom I_L , I_C en I_t en tevens de waarde van de vervangingsspoel of -condensator.

Oplossing: De stroom door de condensatortak is:

$$I_C = U_a \omega C = 10 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-10} = \frac{1}{100} A.$$

De stroom door de zelfinductie:

$$I_L = \frac{U_a}{\omega L} = \frac{10}{2 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{80} A.$$

Hieruit blijkt al dat de stroom door de zelfinductie groter is dan de stroom door de condensator. De keten gedraagt zich inductief.

$$\text{De totaalstroom is: } I_t = I_L - I_C = \frac{1}{80} - \frac{1}{100} = \frac{1}{400} A.$$

Deze stroom ijlt dus 90° na op U_a .

De vervangingszelfinductie is:

$$L_v = \frac{L}{1 - \omega^2 LC} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{1 - 4 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0,2}.$$
$$L_v = 2 \cdot 10^{-3} H.$$

Te maken opgaven: Wt. nummers 74 t/m 76. Oplossingen inleveren.

2.12. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van een weerstand Zelfinductie en condensator

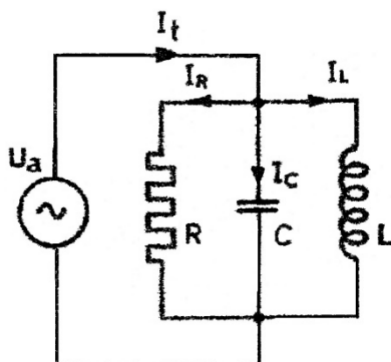
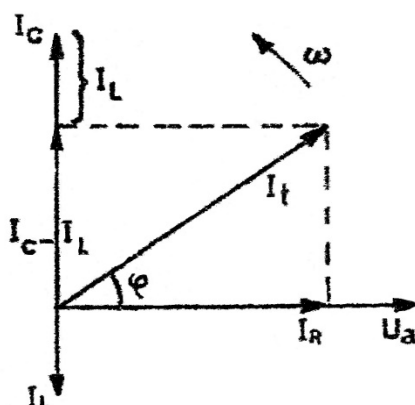
Fig. 2,31. Parallelschakeling van L , C en R .

Fig. 2,32. Vectordiagram van de schakeling volgens fig. 2,31.

$$\frac{U_a^2}{Z^2} = \frac{U_a^2}{R^2} + U_a^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2.$$

Alle termen gedeeld door U_a^2 geeft:

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2$$

En na worteltrekking:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}.$$

Deze uitdrukking stelt de admittantie van de gegeven schakeling voor. Indien we alle vectoren welke in fig. 2,32 een stroom voorstellen, delen door U_a dan resteert een vectordiagram waarin de vectoren de admittantie $\frac{1}{Z}$, de susceptanties ωC en $\frac{1}{\omega L}$ en de conductanties $\frac{1}{R}$ voorstellen.

De impedantie kunnen we nu vinden door beide leden van de uitdrukking voor de admittantie

Het schema, waarin de parallelschakeling van een spoel, condensator en weerstand is aangesloten op een wisselspanning, is in fig. 2,31 weergegeven. Op alle drie geschakelde onderdelen is dezelfde spanning U_a werkzaam.

De stroom door de weerstand is in fase met U_a en is bepaald door $I_R = \frac{U_a}{R}$. De stroom door de zelfinductie welke 90° na-ijlt op U_a is bepaald door $I_L = \frac{U_a}{\omega L}$ en de stroom door de condensator, die 90° voorijlt op U_a , is gelijk aan $I_C = U_a \omega C$. Daar I_C 90° voorijlt en I_L 90° na-ijlt op U_a zijn deze stromen dus in tegenfase. Dit komt duidelijk tot uiting in het bijkomende vector-diagram dat in fig. 2,32 is weergegeven.

De stroom die de krachtbron aan de spoel en condensator gezamenlijk levert is dus bepaald door het verschil van I_C en I_L .

De totaalstroom I_t wordt nu gevormd door $I_C - I_L$ en I_R welke 90° ten opzichte van elkaar verschoven zijn. I_t is nu weer te construeren door de diagonaal in de rechthoek, welke bij de twee vectoren past, te tekenen.

Hieruit volgt met behulp van de stelling van Pythagoras dat:

$$I_t^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2.$$

De totaalstroom I_t is gelijk aan de aangelegde spanning U_a gedeeld door de totale impedantie, dus: $I_t = \frac{U_a}{Z}$.

De stromen vervangen door de quotiënten van aangelegde spanning en betreffende weerstand geeft:

$$\left(\frac{U_a}{Z} \right)^2 = \left(\frac{U_a}{R} \right)^2 + \left(U_a \omega C - \frac{U_a}{\omega L} \right)^2$$

42 R.T.

W.T.

Nadruk verboden

om te keren. Dit geeft:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}.$$

De faseverschuiving, welke de schakeling volgens fig. 2,31 tussen de stroom I_t en de aangelegde spanning U_a teweeg brengt, is volgens fig. 2,32 bepaald door:

$$\tan \varphi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{U_a \omega C - \frac{U_a}{\omega L}}{\frac{U_a}{R}}.$$

Alle termen gedeeld door U_a geeft:

$$\tan \varphi = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} \quad \text{of} \quad \tan \varphi = R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

De cosinus van hoek φ is nu:

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I_t} = \frac{\frac{U_a}{R}}{\frac{U_a}{Z}} = \frac{Z}{R}.$$

De waarde van Z hierin gesubstitueerd geeft:

$$\cos \varphi = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R}}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}.$$

In het voorgaande hebben we verondersteld, dat de stroom door de condensator groter was dan de stroom door de zelfinductie of anders gezegd, dat de susceptantie ωC groter was dan de susceptantie $\frac{1}{\omega L}$. Het resultaat hiervan was, dat de stroom I_t voorijlt op de aangelegde spanning U_a . De schakeling gedraagt zich capaciteef. De vervangingssusceptantie van de spoel en de condensator is nu:

$$\omega C_v = \omega C - \frac{1}{\omega L} \quad \text{of} \quad C_v = C - \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Deze vervangingssusceptantie ωC_v staat nu parallel aan de weerstand R , dus de admittantie kunnen we ook als volgt aangeven:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C_v^2}.$$

Indien de stroom door de zelfinductie groter was verondersteld dan de stroom door de condensator, dan was $\frac{1}{\omega L}$ groter geweest dan ωC . De stroom I_t zou dan na-ijlen op de spanning U_a , de keten gedraagt zich inductief. De vervangingssusceptantie is dan bepaald door:

$$\frac{1}{\omega L_v} = \frac{1}{\omega L} - \omega C = \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega L};$$

Waaruit volgt:

$$\frac{1}{L_v} = \frac{1 - \omega^2 LC}{L} \quad \text{of} \quad L_v = \frac{L}{1 - \omega^2 LC}.$$

De totale admittantie wordt nu:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L_v^2}}.$$

Gaan we uit van de gedachte dat de reactanties en dus ook de susceptanties van de spoel en de condensator gelijk zijn, dan levert de krachtbron geen stroom aan deze beide onderdelen.

Immers $I_C - I_L = 0$.



De totaalstroom I_t is nu gelijk aan de stroom door de weerstand, dus $I_t = \frac{U_a}{R}$.

De schakeling veroorzaakt geen faseverschuiving tussen I_t en U_a . De keten is weer in faseresonantie.

De frequentie waarbij dit optreedt, de resonantiefrequentie, moet nu zo zijn, dat $\omega_r C - \frac{1}{\omega_r L} = 0$, dus de resonantiefrequentie is gelijk aan $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Voor het geval dat de resonantiefrequentie werkzaam is, is de admittantie van de schakeling minimaal ofwel de impedantie maximaal. De stroom I_t zal in het resonantiegeval dus minimaal zijn en gelijk aan $I_{tr} = \frac{U_a}{R}$.

Terwijl de totaalstroom bij resonantie minimaal is, kan door de spoel en de condensator toch een vrij grote stroom vloeien. We moeten bedenken dat we de situatie weer beoordelen enige tijd nadat de spanning U_a werd ingeschakeld en de inschakelverschijnselen zijn gepasseerd.

De verhouding tussen de stroom door één der reactanties en de totaalstroom in resonantie duidt men aan met de kwaliteitsfactor of opslingerfactor Q . Dus:

$$Q = \frac{I_L}{I_{tr}} = \frac{\frac{U_a}{\omega_r L}}{\frac{U_a}{R}} = \frac{R}{\omega_r L} \quad \text{of} \quad Q = \frac{I_C}{I_{tr}} = \frac{U_a \omega_r C}{\frac{U_a}{R}} = R \omega_r C$$

En door ω_r te vervangen door $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ wordt deze kwaliteitsfactor:

$$Q = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Voorbeeld: Op een parallelschakeling van $L = 1000 \mu H$, $C = 200 pF$ en $R = 3000 \Omega$ wordt een spanning U_a aangesloten van 100 V. De frequentie van de aangelegde spanning is $\omega = 10^6$.

Bereken de stroom door elk van de onderdelen, de totaalstroom en de tangens van de hoek van faseverschuiving. Bereken eveneens de bovengenoemde stromen en de opslingerfactor voor het geval dat de resonantiefrequentie werkzaam is.

Oplossing: We berekenen eerst de takstromen.

$$I_L = \frac{U_a}{\omega L} = \frac{100}{10^6 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{10} \text{ A.}$$

$$I_R = \frac{U_a}{R} = \frac{100}{3000} = \frac{1}{30} \text{ A.}$$

$$I_C = U_a \cdot \omega C = 100 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = \frac{1}{50} \text{ A.}$$

De totaalstroom I_t is nu:

$$I_t = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{\frac{1}{900} + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{50}\right)^2}.$$

$$I_t = \sqrt{\frac{1}{900} + \frac{16}{2500}} = \sqrt{\frac{169}{22500}} = \frac{13}{150} \text{ A.}$$

$$\tan \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = \frac{\frac{1}{10} - \frac{1}{50}}{\frac{1}{30}} = \frac{4}{50} \times 30 = 2 \frac{2}{5}.$$

Hierbij ijlt de stroom na op de aangelegde spanning, daar de keten zich inductief gedraagt.

De resonantiefrequentie is: $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-10}}} \cdot \omega_r = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-13}}} = \frac{10^7}{\sqrt{20}} = 224 \cdot 10^4.$

De stroom door de condensator is in het resonantiegeval:

$$I_{cr} = U_a \omega_r C = 100 \times 224 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = \mathbf{0,0448 \text{ A.}}$$

De stroom door de zelfinductie is in dit geval ook **0.0448 A**.

De opslingerfactor is: $Q = \frac{I_L}{I_R} = \frac{0,0448}{\frac{1}{30}} = \mathbf{1,34}.$

2.13. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie met weerstand in serie en een condensator

In het voorgaande hebben we steeds verondersteld, dat de zelfinducties die worden gebruikt geen weerstand bevatten. Dankzij de dikwijls grote draadlengte en kleine doorsnede van de gebezigde draad heeft deze draad echter een zekere weerstand. Deze weerstand kunnen we in serie geschakeld met de zelfinductie werkzaam denken. Later zullen we zien dat deze weerstand nog door andere factoren wordt beïnvloed. Bij nauwkeurige beschouwingen zou bij de condensator ook een weerstand in rekening moeten worden gebracht, echter deze is ten opzichte van die van de zelfinductie zo klein, dat wij hem niet in rekening brengen.

De parallelschakeling van zelfinductie met weerstand en de condensator is in fig. 2,33 weergegeven.

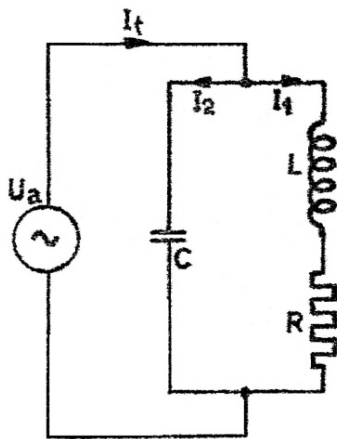


Fig. 2,33. Parallelschakeling van condensator en spoel met weerstand.

We zullen met behulp van een vectordiagram nagaan welk verband er bestaat tussen de aangelegde spanning U_a en de totaalstroom I_t .

We ontwikkelen eerst het vectordiagram voor de serieschakeling van L en R (zie fig. 2,34).

De stroom I_1 welke door de spoel en weerstand optreedt geven we door een horizontale vector weer. De spanning over de weerstand is in fase met deze stroom en wordt weergegeven door de vector $I_1 \omega L$, 90° voorijlend op I_1 . Met behulp van deze beide spanningen vinden we de vector welke de totale spanning over deze serieschakeling voorstelt. De totale spanning is tevens gelijk aan de aangelegde spanning U_a en is dus ook werkzaam over de condensator. De stroom I_2 welke door de condensator vloeit ijlt 90° voor op U_a , dus kan nu ook in tekening worden gebracht.

Door nu een parallellogram te construeren met behulp van de vectoren I_1 en I_2 kan de vector welke de totaalstroom I_t voorstelt getekend worden, door de diagonaal in het parallellogram aan te brengen.

De faseverschuiving welke de I_t bezit ten opzichte van U_a is nu door de hoek φ aangegeven.

In het voorgaande hebben we de vectoren in de juiste positie getekend, zonder ons te verdiepen in de grootte der vectoren. Het is natuurlijk mogelijk de vectoren op de juiste lengte, dat wil zeggen, op de juiste schaal te tekenen. We spreken daartoe af voor de stroomvectoren dat 1 cm lengte een bepaald aantal mA of A voorstelt en voor de spanningsvectoren dat 1 cm een bepaald aantal volts voorstelt.

Is voor bovenstaande schakeling de waarde van de onderdelen en de aangelegde spanning gegeven, dan beginnen we met voor I_1 een zekere stroom aan te nemen en de vector op schaal te tekenen. Met deze aangenomen waarde voor I_1 kunnen we nu alle andere grootheden berekenen en de vectoren tekenen. De juiste waarden van de voorkomende vectoren bepalen we nu als volgt. We bepalen de verhouding tussen de waarden die de gevonden vector U_a voorstelt en de werkelijk aangelegde spanning. Door alle vectoren nu met deze verhouding te vermenigvuldigen vinden we de werkelijke waarden van stromen en spanningen.

Te maken opgaven: Wt. nummers 77 t/m 79. Oplossingen inleveren.

2.13. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie met weerstand in serie en condensator (vervolg)

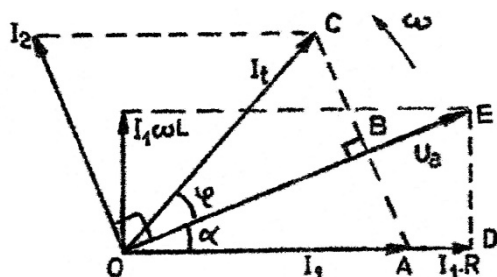


Fig. 2,34. Vectordiagram van de schakeling volgens fig. 2,33.

We zullen nu ook weer uit het vector-diagram de impedantie van de schakeling afleiden. De hoek welke U_a voorrijt op I_1 geven we met α aan. In fig. 2,34 zien we dat $\triangle OBA$ een rechthoekige driehoek is, want $AC \parallel I_2$.

Volgens de stelling van Pythagoras is $I_t^2 = OB^2 + BC^2$. Daar $BC = I_2 - AB$ wordt $I_t^2 = OB^2 + (I_2 - AB)^2$.

In de rechthoekige driehoek is:

$$\cos \alpha = \frac{OB}{I_1} \text{ en } \sin \alpha = \frac{AB}{I_1}, \text{ waaruit volgt dat:}$$

$$OB = I_1 \cos \alpha \text{ en } AB = I_1 \sin \alpha. \text{ waaruit volgt dat: } OB = I_1 \cos \alpha \text{ en } AB = I_1 \sin \alpha.$$

Deze uitdrukkingen in I_t^2 gesubstitueerd, geven:

$$I_t^2 = I_1^2 \cos^2 \alpha + (I_2 - I_1 \sin \alpha)^2$$

Het laatste deel van deze vorm stelt het kwadraat van een tweeterm voor; een zogenaamd merkwaardig product van het type: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

De uitwerking geeft nu:

$$I_t^2 = I_1^2 \cos^2 \alpha + I_2^2 - 2I_1 I_2 \sin \alpha + I_1^2 \sin^2 \alpha.$$

$$I_t^2 = I_1^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + I_2^2 - 2I_1 I_2 \sin \alpha.$$

Uit de meetkunde weten we reeds dat $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ dus:

$$I_t^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1 I_2 \sin \alpha.$$

Uit de rechthoekige driehoek ODE volgt dat:

$$\sin \alpha = \frac{DE}{OE} = \frac{I_1 \omega L}{U_a} = \frac{I_1 \omega L}{I_1 \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Reeds is bekend dat $I_2 = U_a \omega C$ en $I_1 = \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$. De uitdrukking voor I_t^2 wordt nu:

$$I_t^2 = \frac{U_a^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + U_a^2 \omega^2 C^2 - 2 \cdot \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} U_a \omega C \cdot \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

U_a^2 buiten de haken gebracht geeft:

$$I_t^2 = U_a^2 \left(\frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2 - \frac{2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \text{ of:}$$

$$I_t^2 = U_a^2 \left(\frac{1 - 2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2 \right) \text{ en na worteltrekking:}$$

$$I_t = U_a \sqrt{\frac{1 - 2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2}.$$

Beide zijden van het = -teken gedeeld door U_a :

$$\frac{I_t}{U_a} = \sqrt{\frac{1 - 2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2}.$$

Daar $\frac{I_t}{U_a}$ voorstelt de admittantie $\frac{1}{Z}$ is de impedantie van deze schakeling dus:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - 2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2}}.$$

Uit fig. 2,34 is verder af te leiden dat: $\tan \varphi = \frac{BC}{OB}$ of $\tan \varphi = \frac{AC - AB}{OB} = \frac{I_2 - I_1 \sin \alpha}{I_1 \cos \alpha}.$

46 R.T.

W.T.

Nadruk verboden

We hebben uit de rechthoekige driehoek reeds bepaald: $\sin \alpha = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$.
Gemakkelijk is in te zien dat $\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$.

De grootheden met de uitdrukkingen voor I_1 en I_2 gesubstitueerd in de uitdrukking voor $\tan \varphi$ geeft:

$$\tan \varphi = \frac{U_a \omega C - \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}}{\frac{U_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}} = \frac{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

Dus:
$$\tan \varphi = \frac{\omega C(R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L}{R}.$$

In het voorgaande verondersteld geval, ijlde de stroom I_t vóór op U_a . De keten gedraagt zich capacitief. Voor andere waarden van de frequentie of bij dezelfde frequentie, maar bij andere waarden van de capaciteit en de zelfinductie kan de stroom na-ijlen op U_a ; dus de keten een inductief gedrag hebben. Ook is het mogelijk dat de stroom I_t in fase is met de aangelegde spanning U_a . Er heerst dan resonantie.

We zullen dit geval van resonantie nader onderzoeken. Resonantie wil zeggen, de fasehoek φ is gelijk nul, dus, die waarde van de frequentie waarbij $\tan \varphi = 0$, is de resonantiefrequentie.

$$\tan \varphi = \frac{\omega_r C(R^2 + \omega_r^2 L^2) - \omega_r L}{R} = 0.$$

Deze breuk is nul, indien de teller gelijk is aan nul, dus:

$$\omega_r C(R^2 + \omega_r^2 L^2) - \omega_r L = 0 \quad \text{of} \quad \omega_r (CR^2 + \omega_r^2 L^2 C - L) = 0.$$

Deze som neemt de waarde nul aan voor het geval dat $\omega_r = 0$ (heeft geen betekenis) en voor het geval dat $CR^2 + \omega_r^2 L^2 C - L = 0$ of $\omega_r^2 L^2 C = L - R^2 C$.

Beide leden gedeeld door $L^2 C$ geeft:

$$\omega_r^2 = \frac{L - R^2 C}{L^2 C} = \omega_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}$$

En na worteltrekking vinden we voor de waarde van de resonantiefrequentie:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}.$$

Indien we de waarde van de impedantie willen bepalen, kunnen we in de uitdrukking voor de admittantie ω^2 vervangen door bovenstaande waarde van de resonantiefrequentie. Dit wordt:

$$\frac{1}{Z_r^2} = \frac{1 - 2\omega_r^2 LC}{R^2 + \omega_r^2 L^2} + \omega_r^2 C^2 \quad \text{en met de waarde voor } \omega_r^2:$$

$$\frac{1}{Z_r^2} = \frac{1 - 2LC \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right)}{R^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right) L^2} + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right) C^2.$$

De haakjes weggewerkt geeft:

$$\frac{1}{Z_r^2} = \frac{1 - 2 + \frac{2R^2 C}{L}}{R^2 + \frac{L}{C} - R^2} + \frac{C}{L} - \frac{R^2 C^2}{L^2} \quad \text{of}$$

$$\frac{1}{Z_r^2} = \frac{-1 + 2 \frac{R^2 C}{L}}{\frac{L}{C}} + \frac{C}{L} - \frac{R^2 C^2}{L^2}.$$

Alle termen onder dezelfde noemer brengen geeft:

$$\frac{1}{Z_r^2} = \frac{-1 + 2 \frac{R^2 C}{L} + 1 - \frac{R^2 C}{L}}{\frac{L}{C}} = \frac{\frac{R^2 C}{L}}{\frac{L}{C}} = \frac{R^2 C^2}{L^2}.$$

$$\frac{1}{Z_r} = \frac{RC}{L} \quad \text{of} \quad Z_{res} = \frac{L}{CR}.$$



Deze impedantie stelt dus een weerstand voor daar de faseverschuiving nul is. Dit is dan tevens de maximum-waarde welke de impedantie kan aannemen. Voor alle andere frequenties, dus buiten resonantie is de impedantie kleiner. Bij constante aangelegde spanning zal de stroom in het resonantiegeval dus minimaal zijn.

Dit komt ook weer tot uiting in de resonantiekromme die we van deze schakeling kunnen opnemen bij constante waarde van de aangelegde spanning U_a .

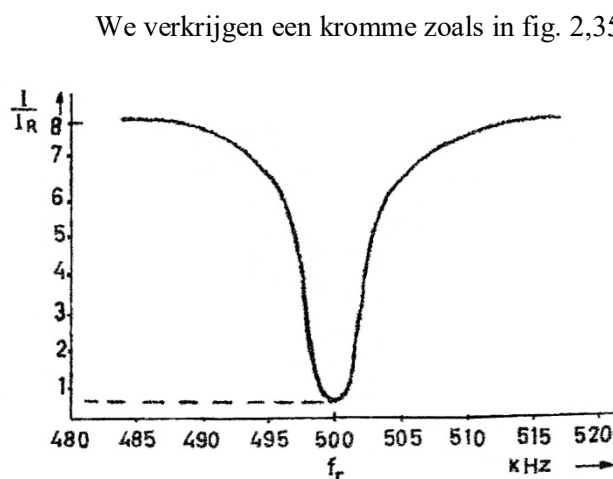


Fig. 2,35. Resonantiekromme van de schakeling volgens fig. 2,33 bij constante spanning.

We verkrijgen een kromme zoals in fig. 2,35 is weergegeven. De scherpte van de “piek”, welke de resonantiekromme bezit, hangt weer af van de grootte van de weerstand en de verhouding $\frac{L}{C}$. Bij kleine weerstand en grote waarde van de verhouding $\frac{L}{C}$ zal de piek het scherpst zijn. Naar aanleiding van het feit, dat de keten in het resonantiegeval een grote impedantie voor de stroom bezit, noemt men deze keten wel sperkring. Ook wordt deze keten wel aangeduid met de naam vliegwielerkring, daar hier een grote stroom door de spoel en condensator kan optreden, rondgaande stroom genoemd, terwijl de doorgaande stroom I_t betrekkelijk klein kan zijn. De verhouding van deze twee stromen wordt gebruikt om de kwaliteitsfactor van de kring tot uitdrukking te brengen.

$$Q = \frac{I_C}{I_t} = \frac{\frac{U_a \omega C}{U_a}}{\frac{L}{CR}} \rightarrow Q = \frac{\omega CL}{CR} = \frac{\omega L}{R}.$$

Indien de weerstand R klein is ten opzichte van ωL kunnen we met een kleine benadering schrijven: $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ en $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, dus voor de Q -factor:

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Het is ook mogelijk van deze keten een resonantiekromme op te nemen, terwijl de stroomwaarde welke wordt toegevoerd aan de keten constant wordt gehouden. Naarmate de impedantie groter wordt, is een grotere spanning nodig om de stroom door de kring te handhaven. Deze spanning zetten we nu als functie van de frequentie uit en we verkrijgen fig. 2,36.

Voorbeeld: Op de schakeling volgens fig. 2,33 wordt een spanning aangesloten van 100 V.

Bereken de stroom door de spoel en door de condensator en de totaalstroom.

$L = 200 \mu H$, $C = 5000 pF$, $R = 100 \Omega$, $\omega = 10^6$.

Bereken deze stromen eveneens, indien de aangelegde spanning de resonantiefrequentie bezit.

Oplossing: We berekenen eerst de takstromen:

$$I_2 = U_a \omega C = 100 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = \frac{1}{2} A.$$

$$I_1 = \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{100}{\sqrt{10^4 + 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-18}}} = \frac{100}{\sqrt{10^4 + 4 \cdot 10^4}} = \frac{100}{\sqrt{5 \cdot 10^4}} = \frac{100}{\sqrt{5} \cdot 10^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} A. \rightarrow I_1 = \frac{1}{5} \sqrt{5} = 0,446 A.$$

48 R.T.

W.T.

Nadruk verboden

Voor de totaalstroom berekenen we:

$$I_t = U_a \sqrt{\frac{1 - 2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2} = 100 \sqrt{\frac{1 - 2 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-10}}{10^4 + 4 \cdot 10^4} + 10^{12} \cdot 25 \cdot 10^{-18}}.$$

$$I_t = 100 \sqrt{\frac{1 - 0,16}{5 \cdot 10^4} + \frac{25}{10^6}} = 100 \sqrt{\frac{20 - 3,2 + 25}{10^6}} = 100 \sqrt{\frac{41,8}{10^6}}.$$

$$I_t = \frac{100 \cdot 6,46}{10^3} = \mathbf{0,646 \text{ A}}.$$

De resonantiefrequentie van de schakeling is:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-9}} - \frac{10^4}{4 \cdot 10^{-8}}} = \sqrt{\frac{1}{10^{-12}} - \frac{1}{4 \cdot 10^{-12}}}.$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{3}{10^{-12}}} = 10^6 \sqrt{3} = \mathbf{1,73 \cdot 10^6}.$$

De takstromen zijn nu:

$$I_{2r} = U_a \omega_r C = 100 \cdot 1,73 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = \mathbf{0,865 \text{ A}}.$$

$$I_{1r} = \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + \omega_r^2 L^2}} = \frac{100}{\sqrt{10^4 + 3 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-8}}} = \frac{100}{\sqrt{13 \cdot 10^4}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \mathbf{0,28 \text{ A}}.$$

$$I_{tr} = \frac{U_a}{\frac{L}{CR}} = \frac{U_a CR}{L} = \frac{100 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cdot 10^2}{2 \cdot 10^{-4}} = \mathbf{\frac{1}{4} \text{ A}}.$$

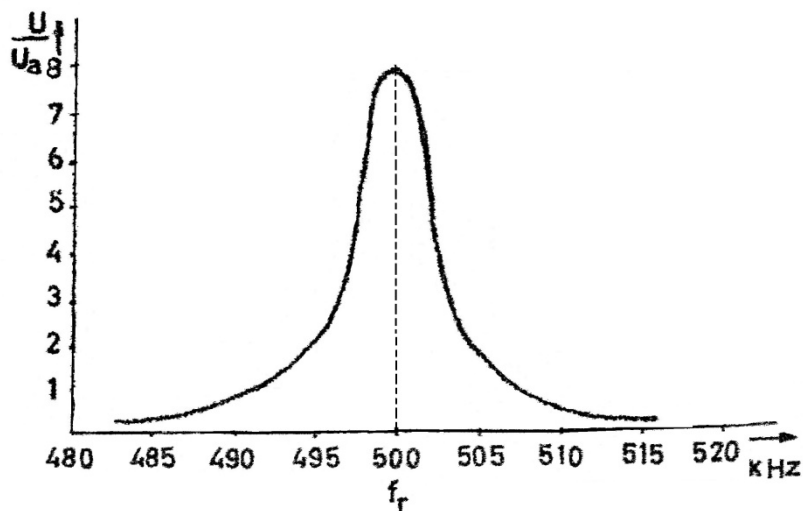


Fig. 2,36. Resonantiekromme van de schakeling van fig. 2,33 bij constante stroom.

Te maken opgaven: Wt. nummers 80 t/m 85. Oplossingen inleveren.

2.13. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie met weerstand in serie en condensator (vervolg)

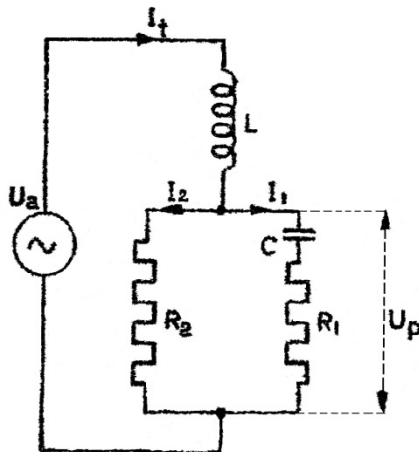


Fig. 2,37 Voorbeeld

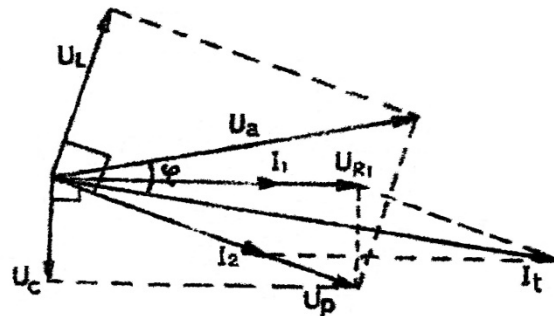


Fig. 2,28. Vectordiagram van de schakeling volgens fig. 2,37.

Voorbeeld: Bepaal het vectordiagram van de stromen en spanningen welke voorkomen in de gegeven schakeling (fig. 2,37). Neem de grootte van de optredende stromen en spanningen aan.

Oplossing: We beginnen met de grootheden van de serieschakeling van R_1 en C door vectoren weer te geven. We kiezen daartoe eerst de vector I_1 (fig. 2,38), welke de stroom door deze serieschakeling voorstelt. Bij deze stroom I_1 ontstaat een spanning U_{R1} over de weerstand R_1 , in fase met I_1 en een spanning U_C over de condensator welke 90° na-ijlt op de stroom I_1 .

Met behulp van de rechthoek op U_{R1} en U_C kunnen we de spanningsvector U_p tekenen (de diagonaal) welke de spanning over de parallelschakeling van R_2 met R_1 en C voorstelt. Deze spanning is tevens werkzaam over de weerstand R_2 .

De stroom I_2 door R_2 kan nu worden aangegeven door een vector in fase met U_p . De stroom welke door de gehele parallelschakeling wordt opgenomen is nu te bepalen door de som van I_1 en I_2 uit beide vectoren I_1 en I_2 af te leiden. De diagonaal in het parallellogram op I_1 en I_2 geconstrueerd geeft de som weer. Deze som van I_1 en I_2 is tevens de stroom I_t door de spoel L . Over de spoel wordt nu een spanning U_L ontwikkeld welke 90° voorijlt op de stroom I_t . De aangelegde spanning U_a is gelijk aan de som van de spanning U_p en de spanning U_L . Door de som van U_p en U_L te construeren vinden we U_a die in dit gekozen geval een hoek φ voorijlt op I_t , de totaalstroom welke de generator levert.

2.14. Vermogen bij wisselstroom

Bij de behandeling van het vermogen, dat ontwikkeld wordt door gelijkstroom, hebben we gevonden dat dit te berekenen is uit $P = I \times U$. Bij wisselstroom is het ontwikkelde vermogen van meer factoren afhankelijk.

We gaan eerst uit van de gedachte, dat een wisselspanning is aangesloten op een weerstand. stroom en spanning zijn dan in fase.

Het ontwikkelde vermogen is nu te bepalen uit het product van de effectieve waarde van de

50 R.T.

W.T.

Nadruk verboden

Wisselspanning en de effectieve waarde van de wisselstroom.

Dus: $P = I_{eff} \times U_{eff}$ of $P = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \times \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \hat{I} \hat{U}$, uitgedrukt in de amplituden van stroom en spanning.

We kunnen het vermogen ook uitdrukken in de weerstand. indien we $I = \frac{\hat{U}}{R}$ substitueren, verkrijgen we $P = \frac{1}{2} \frac{\hat{U}^2}{R}$ en $\hat{U} = \hat{I} R$ gesubstitueerd levert op $P = \frac{1}{2} \hat{I}^2 R$.

Deze beide uitdrukkingen ook weer uitgedrukt in de effectieve waarde van stroom en spanning geeft:

$$P = I_{eff}^2 R \quad \text{en} \quad P = \frac{U_{eff}^2}{R}.$$

Indien faseverschuiving tussen stroom en spanning optreedt, is dit anders. Om een goed inzicht hierin te verkrijgen gaan we uit van het geval dat stroom en spanning 90° in fase verschoven zijn (zie fig. 2,39).

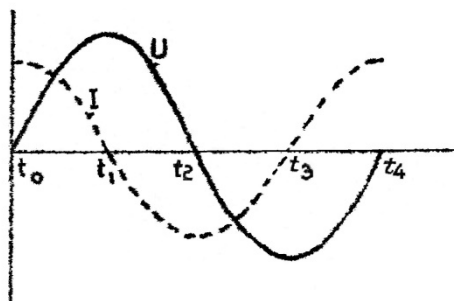


Fig. 2,39. Het vermogen indien I en U 90° verschoven zijn.

Gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$ verdelen we de tijd in zeer kleine tijdsdeeltjes Δt . Door alle energie op deze wijze gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$ bij elkaar op te tellen, vinden we dus de totale energie welke gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$ wordt ontwikkeld.

Opgemerkt zij echter, dat we daar gedurende dit tijdvak I zowel als U positief zijn, de energie ook positief kunnen noemen. Ook gedurende de tijdvakken $t_1 - t_2$, $t_2 - t_3$ en $t_3 - t_4$ bepalen we op bovengenoemde wijze de ontwikkelde energie.

Gedurende het tijdvak $t_1 - t_2$ is de stroom negatief en de spanning positief; het product dus negatief en dus de ontwikkelde energie ook negatief. Gedurende het tijdvak $t_2 - t_3$ zijn stroom en spanning negatief; het product en dus ook de ontwikkelde energie positief. Gedurende het tijdvak $t_3 - t_4$ is de ontwikkelde energie weer negatief. Uit de figuur is gemakkelijk af te leiden dat de ontwikkelde energie tijdens de 4 tijdvakken telkens even groot is. Bepalen we de som van deze vier hoeveelheden energie, dan blijkt deze nul te zijn. Gedurende de gehele periode van de wisselstroom wordt dus geen energie geleverd. We kunnen ons dit nu als volgt voorstellen. Gaan we uit van de gedachte dat positieve energie, de energie is welke de krachtbron aan de keten levert, dan zal de negatieve energie de energie voorstellen die de keten weer terug levert aan de krachtbron.

Bij een zuivere condensator zal de stroom 90° voorijlen op de spanning. De positieve energie wordt aan de condensator geleverd tijdens het laden van deze ($\frac{1}{2} CV^2$ joules). De negatieve energie komt tijdens het ontladen weer vrij.

Bij een zuivere zelfinductie (stroom ijlt 90° na op de spanning) zal de positieve energie aan de spoel worden toegevoerd tijdens het opbouwen van het magnetisch veld; de negatieve energie komt weer vrij tijdens het afnemen van het veld. Een zuivere zelfinductie of condensator verbruikt dus geen energie.

De stroom wordt in genoemde ketens een wattloze stroom genoemd.

Is de faseverschuiving tussen stroom en spanning tussen 0° en 90° in gelegen, dan moet in de keten een weerstand voorkomen en wordt er energie geleverd.

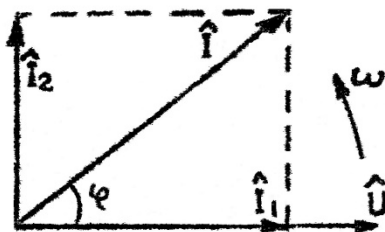


Fig. 2,40. Energie bij willekeurige fasehoek tussen $\hat{I}$ en $\hat{U}$.

Hieruit volgt voor het geleverde vermogen:

$$P = \frac{1}{2} \hat{I} \hat{U} \cos \varphi.$$

Hiermede kunnen we dus het vermogen bepalen voor elke faseverschuiving welke tussen stroom en spanning optreedt. Of de faseverschuiving positief of negatief is, dus voor of na-ijlend is, doet aan deze uitdrukking niets af.

De boven verkregen uitdrukking geldt eveneens voor het geval dat de faseverschuiving nul is, voor $\varphi = 0$ is $\cos \varphi = 1$, dus wordt het vermogen weer $\frac{1}{2} \hat{I}_1 \hat{U}$.

Voorbeeld: op de schakeling volgens fig. 2,33 wordt een spanning aangesloten met een amplitudewaarde van 500 V. Bereken het vermogen dat aan deze schakeling wordt geleverd.

$$L = 300 \mu\text{H}, R = 100 \Omega, C = 2000 \text{ pF}, \omega = 10^6.$$

Oplossing: Het gemakkelijkst gaan we dikwijls te werk, indien we de stroom door de desbetreffende weerstand berekenen. De weerstanden stellen de energieverbruikers voor, de reactanties verbruiken geen energie, want deze gedragen zich wattloos. De stroom door de weerstand is bepaald door:

$$\hat{I}_R = \frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{500}{\sqrt{10^4 + 10^{12} \cdot 9 \cdot 10^{-8}}} = \frac{500}{\sqrt{10^4 + 9 \cdot 10^4}} = \frac{500}{\sqrt{10^5}}.$$

$$\hat{I}_R = \frac{500}{100\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \text{ A}.$$

Het geleverde vermogen is nu: $P = \frac{1}{2} I_r^2 R = \frac{1}{2} \times \frac{25}{10} \cdot 100 = 125 \text{ watt}.$

Voorbeeld:

Een spoel van 1000 μH met een serieweerstand R_L van 500 Ω wordt parallel geschakeld met een condensator van 500 pF en waarvan de verliezen vertegenwoordigd kunnen worden door een serieweerstand R_C van 400 Ω . De spanning welke wordt aangelegd heeft een frequentie van 314000 Hz en een waarde van 100 V_{eff} .

Bereken:

- 1°. de stroom door de spoel.
- 2°. De spanning over de zuivere zelfinductie.
- 3°. De spanning over de ohmse weerstand van de spoel.
- 4°. De faseverschuiving tussen de stroom door de spoel en de aangelegde spanning.
- 5°. De stroom door de condensator.
- 6°. De spanning over de zuivere condensator.
- 7°. de spanning over de ohmse weerstand van de condensator.
- 8°. de faseverschuiving tussen de stroom door de condensator en de aangelegde spanning.

52 R.T.

W.T.

Nadruk verboden

- 9°. De faseverschuiving tussen de stroom door de spoel- en door de condensatortak (behoeft niet te worden berekend).
10°. Het vermogen dat de inductieve tak opneemt.
11°. Het vermogen dat de capacatieve tak opneemt.
12°. Het vermogen dat de aangelegde spanningsbron moet leveren.
13°. Het aantal kwh. dat in 20 uur wordt verbruikt.
14°. Het aantal calorieën dat in 20 uur wordt ontwikkeld.

Oplossing:

1°. De stroom door de spoel is bepaald door: $I_L = \frac{U_a}{\sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2}} =$
$$= \frac{100}{\sqrt{25 \cdot 10^4 + (2\pi \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3})^2}} = \frac{100}{\sqrt{25 \cdot 10^4 + 40 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-6}}} = \frac{100}{\sqrt{25 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^6}} =$$
$$= \frac{100}{\sqrt{425 \cdot 10^4}} = \frac{1}{20,6} \text{ A} = \mathbf{0,0485 \text{ A}}$$

2°. De spanning over de zelfinductie is: $U_L = I_L \times \omega L = 0,0485 \times 2\pi \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} =$
$$= 0,0485 \times 2 \cdot 10^3 = \mathbf{97 \text{ V}}.$$

3°. De spanning over de ohmse weerstand is: $U_R = I_L \times R_L = U_{RL} = 0,0485 \times 500 = \mathbf{24,25 \text{ V}}.$

4°. De faseverschuiving van de stroom door de spoel en de aangelegde spanning is bepaald door:
$$\tan \varphi_L = \frac{\omega L}{R_L} = \frac{2\pi \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{500} = \mathbf{4}.$$

5°. De stroom door de condensator berekenen we uit:

$$I_C = \frac{U_a}{\sqrt{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{100}{\sqrt{16 \cdot 10^4 + \frac{1}{(2\pi \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-10})^2}}} = \frac{100}{\sqrt{16 \cdot 10^4 + \frac{1}{10^{-6}}}} =$$
$$I_C = \frac{100}{\sqrt{16 \cdot 10^4 + 10^6}} = \frac{100}{\sqrt{116 \cdot 10^4}} = \frac{1}{\sqrt{116}} = \frac{1}{10,77} = \mathbf{0,093 \text{ A}}.$$

6°. De spanning over de zuivere condensator is:

$$U_C = I_C \times \frac{1}{\omega C} = 0,093 \times \frac{1}{2\pi \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = 0,093 \times \frac{1}{10^{-3}} = \mathbf{93 \text{ V}}.$$

7°. De spanning over de weerstand is: $U_{RC} = I_C \times R_C = 0,093 \times 400 = \mathbf{37,2 \text{ V}}.$

8°. De faseverschuiving tussen I_C en U_a ligt vast door:

$$\tan \varphi_C = \frac{1}{\omega C R_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-10} \cdot 400} = \mathbf{2,5}$$

9°. De stroom door de condensator ijlt een hoek φ_C voor op U_a , terwijl de stroom door de spoel een hoek φ_L na-ijlt op U_a . De faseverschuiving tussen I_C en I_L is dus gelijk aan $\varphi_C + \varphi_L$.

10°. Het vermogen dat de inductieve tak opneemt, zal alleen in R_L worden omgezet. Daar de aangelegde spanning in effectieve waarde gegeven was, zijn dus alle stromen en spanningen welke hiervoor worden berekend in de effectieve waarde uitgedrukt. Het vermogen is hier dus:

$$P_L = I_L^2 \times R_L \text{ of } P_L = I_L \times U_{RL} = 0,0485 \times 24,25 = \mathbf{1,18 \text{ W}}.$$

11°. Het vermogen dat de capacatieve tak opneemt is:

$$P_C = I_C^2 \times R_C \text{ of } P_C = I_C \times U_{RC} = 0,093 \times 37,2 = 3,46 \text{ W}.$$

12°. Het vermogen dat de gehele schakeling opneemt is: $1,18 + 3,46 = 4,64 \text{ W}.$

13°. Het aantal kwh. dat in 20 uur wordt opgenomen is:

$$4,64 \times 10^{-3} \times 20 = 0,093 \text{ kwh}.$$

14°. Het aantal calorieën dat wordt ontwikkeld is:

$$\frac{0,093}{4270} = 21,7 \cdot 10^{-6} \text{ Kcal}.$$

Te maken opgaven: Wt. nummers 85 t/m 91. Oplossingen inleveren.

R.T.

Wisselstroomtheorie. Les 18

Nadruk verboden 53



HILVERSUM

Hoofdstuk 3

De transformator

3.1. Het principe van de transformator

Wordt vervolgd.....