R.T.

Inhoud Rekenkunde.

Nadruk verboden

HILVERSUM

Rekenkunde. Les 1

1.1. Inleiding

De rekenkunde in deze cursus is geheel anders opgebouwd dan normaal het geval is. Er is getracht de leerstof zodanig in te delen en te behandelen dat een zo goed mogelijke aanpassing wordt verkregen aan de verschillende in de techniek behandelde onderwerpen. Het is dikwijls noodzakelijk een bepaald onderwerp in de rekenkunde te behandelen, daar het voor de begrippen in de techniek gewenst is, terwijl de cursist eigenlijk nog niet zo ver in de wiskunde gevorderd is dat bedoeld onderwerp volkomen exact behandeld kan worden.

Later komen we dan ook op diverse onderwerpen terug.

1.2. Evenredigheidsfactoren

Bij het uitvoeren van de rekenkundige bewerkingen zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, enz. dient men er altijd voor te zorgen de berekeningen met dezelfde eenheden uit te voeren. Het is een ieder bekend dat het niet mogelijk is bv. een aantal boeken op te tellen bij een aantal schriften en evenmin een aantal meters bij een aantal centimeters. In het tweede geval kunnen we echter de ene grootheid herleiden tot de andere, waarna de bewerking wel uitgevoerd kan worden.

We gaan van de meters centimeters maken of van centimeters meters. Ook kunnen we de beide herleiden bv. in dm. of mm. We weten nu dat: $1m = 10\ dm = 100\ cm$.

Het getal dat het mogelijk maakt de verschillende eenheden met elkaar te vergelijken heet een evenredigheidsfactor. In het voorbeeld is dus de evenredigheidsfactor bij het overgaan van meters in decimeters 10 en bij het overgaan van meters in centimeters 100.

In de techniek waarbij in de formules steeds vergelijkingen voorkomen, bestaande uit verschillende eenheden wordt een zeer groot gebruik gemaakt van deze evenredigheidsfactoren (zie o.a. de wet van Coulomb, magnetische inductie, de capaciteitswet en vele andere).

1.3. Machten van tien

Daar in de elektrotechniek direct gebruik gemaakt moet worden van de machten van tien, zullen we deze in de rekenkunde vooraan behandelen. Wanneer we een aantal getallen met elkaar vermenigvuldigen, is het mogelijk vermenigvuldiging korter op te schrijven.

Bijvoorbeeld: $10 \times 10 = 10^2$ (spreek uit, tien kwadraat);
$10 \times 10 \times 10 = 10^3$ (spreek uit, tien tot de derde);
$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ (spreek uit, tien tot de vierde).

Het getal 10 is het grondtal; de getallen 2, 3, en 4 heten de exponent.
Het geheel, dus $10^2, 10^3, 10^4$ heet de macht. Het bovenstaande geldt voor ieder getal en niet alleen voor het grondtal 10, dus $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5$.

Algemeen geldt dan: $a^b = a \times a \times a \times a\ .\ .\ .\ .\ .\ .$

a is het grondtal, b de exponent, dus b factoren a. Bij het vermenigvuldigen van twee machten met hetzelfde grondtal vinden we als uitkomst een macht met hetzelfde grondtal en met een exponent die gelijk is aan de som van de exponenten van ieder der afzonderlijke machten.

$$10^2 \times 10^3 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5;$$
$$10^7 \times 10^8 \times 10^3 = 10^{7+8+3} = 10^{18};$$
$$7^3 \times 7^5 \times 7^6 = 7^{14}.$$

Worden twee machten met hetzelfde grondtal op elkaar gedeeld, dan geeft de uitkomst een nieuwe macht met hetzelfde grondtal en als exponent het verschil der afzonderlijke machten.

$$\frac{10^5}{10^2} = \frac{10\times10\times10\times10\times10}{10\times10} = 10 \times 10 \times 10 = 10^3.$$

$\frac{5^8}{5^3} = 5^{8-3} = 5^5$; $\frac{4^6}{4^2} = 4^2$.

Bij een deling noemen we het getal boven de deelstreep de teller en het getal onder de deelstreep de noemer.

Nu is het natuurlijk mogelijk dat de exponent van het grondtal is de noemer groter is dan de exponent van het grondtal in de teller, bv:

$$\frac{10^3}{10^5} = \frac{10\times10\times10}{10\times10\times10\times10\times10} = \frac{1}{10\times10} = \frac{1}{10^2} .$$

Het is echter ook mogelijk de regel te handhaven dat de exponent van het grondtal van de noemer toch van die van de teller afgetrokken wordt, ook al is de exponent van de noemer groter dan die van de teller.

$\frac{10^3}{10^5} = 10^{3-5} = 10^{-2}$ (spreek uit tien tot de min tweede).

We noemen dit dan de machten met negatieve exponent. Beschouwen we nu de twee bewerkingen nog eens naast elkaar, dus:

$\frac{10^3}{10^5} = \frac{1}{10^2}$ en $\frac{10^3}{10^5} = 10^{3-5} = 10^{-2}$, dan volgt hieruit dat $\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$.

Blijkbaar kunnen we een macht van de noemer naar de teller brengen indien we de exponent met tegengesteld teken nemen. Hetzelfde geldt ook indien we een macht van de teller naar de noemer brengen. We komen zo tot de volgende algemene regel:

Een macht kan van de noemer naar de teller en omgekeerd van de teller naar de noemer gebracht worden, indien we het teken van de exponent tegengesteld nemen.

Men dient er op te letten dat 10^5 een groot getal is, doch $10^{-5} = \frac{1}{10^5}$ een klein getal.

Enige voorbeelden:

$\frac{1}{10^7} = 10^{-7}$; $\frac{10.000}{100} = \frac{10\times10\times10\times10}{10\times10} = \frac{10^4}{10^2} = 10^2$;

$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{10\times10\times10\times10\times10} = \frac{1}{100.000}$;

$17{,}285 = \frac{17285}{1000} = 17285\times \frac{1}{1000} = 17285 \times \frac{1}{10^3} = 17285 \times 10^{-3}$;

$18{,}25 = \frac{1825}{100} = \frac{1825}{10^2} = 1825 \times 10^{-2}$;

$\frac{1}{10^{-7}} = 10^7$; $\frac{10^3}{10^{-5}} = 10^{3-(-5)} = 10^8$

Daar in de techniek de evenredigheidsfactoren die gebruikt worden in de formules (o.a. in de wet van Coulomb) dikwijls slechts zeer kleine getallen zijn, wordt er meestal gebruik gemaakt van de negatieve exponenten.

Ter oefening maken de opgaven 1 t/ 5.

Oplossingen inzenden van de opgaven 6 t/m 10.

R.T.

Rekenkunde. Les 2

2.1. Positieve en negatieve getallen

Een rechte lijn wordt in een aantal gelijke stukken verdeeld bv. in centimeters.
Bij de op elkaar volgende punten wordt de rij der natuurlijke getallen geplaatst; deze is:
0, 1, 2, 3, 4. . . . . . . enz.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Deze rechte lijn waarop de getallen uitgezet worden noemen we de getallenrechte.

Moeten we nu de som van twee getallen bepalen bv. $5 + 2$, dan zien we op de getallenrechte dat AF gelijk is aan 5. Tellen we hier FH die twee eenheden bedraagt, bij op, dan vinden we $AH = 7$, dus $AF + FH = AH$ of $5 + 2 = 7$.

De optelling is een bewerking waarbij de eenheden van twee of meer getallen verenigd worden tot één enkel getal, dat de som heet. De getallen die opgeteld moeten worden heten de termen van de som. Bij de bewerkingen moet er altijd voor worden gezorgd dat de diverse termen in dezelfde eenheden worden uitgedrukt, wil men de bewerking kunnen uitvoeren.
Het is dus bv. onmogelijk om meters bij centimeters op te tellen.

Bij de optelling mogen de termen geheel willekeurig verplaatst worden; men is dus niet aan een bepaalde volgorde gebonden bij het uitrekenen van een vraagstuk.

$$8 + 3 + 2 + 7 = 8 + 2 + 3 + 7 = 10 + 10 = 20.$$

De cursist kan dus de volgorde zodanig nemen dat het rekenen voor hem/haar zo eenvoudig mogelijk wordt.

Nu bekijken we eens de opgave $8 - 3$, dat wil zeggen, we moeten 8 eenheden verminderen met drie eenheden. Op de getallenrechte geeft AI 8 eenheden aan. Verminderen we deze 8 eenheden met 3 eenheden, dus met de lengte FI, dan houden we de lengte AF over, die 5 eenheden bedraagt, dus $8 - 5 = 3$. Deze bewerking heet aftrekken.

De uitkomst van een aftrekking heet verschil. Het getal dat de bewerking uitvoert, heet aftrekker (het getal 3) en het getal dat de bewerking ondergaat, heet aftrektal (het getal 8). De aftrekking is een bewerking waarbij we een getal vinden (het verschil) dat bij het ene van de twee getallen (de aftrekker) moet worden opgeteld om het andere getal (het aftrektal) tot som te krijgen.

Zijn meer dat twee getallen door $+$ en $-$ -tekens met elkaar verbonden, dan vormen zijn een veelterm, zoals bv. $18 + 9 - 7 - 3 + 4 - 5 + 8$.

Bij het uitrekenen van een veelterm mag men weer een geheel willekeurige volgorde nemen. Het is meestal raadzaam eerst alle positieve grootheden bij elkaar te nemen, dus bij elkaar op te tellen en daarna alle negatieve grootheden bij elkaar te nemen, dus ook bij elkaar op te tellen en deze laatste som af te trekken van de eerst. Dus: $(18 + 9 + 4 + 8) - (7 + 3 + 5) = 39 - 15 = 24$.

Krijgen we nu een aftrekking waarbij de aftrekker groter is dan het aftrektal, bv. $5 - 7$, dan zullen we zien dat de getallenrechte ontoereikend is. AF is 5 eenheden en AH is 7 eenheden.
We moeten dus AH vanuit het punt F naar links uitzetten en we zien dat we 2 eenheden tekort komen, zodat de rechte dus naar links verlengd moet worden. De getallen die links van A uitgezet moeten worden, noemen we negatieve getallen, die rechts van A uitgezet worden, heten de positieve getallen. Het getal dat bij het punt A zelf uitgezet wordt, dus het getal nul, kent men geen positieve of negatieve betekenis toe. Het getal nul is in de wiskunde een van de moeilijkste begrippen waarop we later uitvoerig terug zullen komen.

De volledige getallenrechte ziet er nu als volgt uit:

-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

De rechte moet aan beide kanten verlengd gedacht worden tot in het oneindige, dus tot plus oneindig (geschreven als $+\infty$) en tot min oneindig ($-\infty$). Indien we nu alleen de grootte van een getal beschouwen, dat wil zeggen wanneer het ons niet interesseert of dit getal positief of negatief is, dan spreken we over de <u>absolute waarde</u> van dat getal. We geven dit aan door twee verticale streepjes naast het getal te plaatsen.

Dus de absolute waarde van $+25$ of van -25 is 25. We zullen een-en-ander met een voorbeeld trachten te verduidelijken.

Stel eens dat we f. 25,- bezitten. We kunnen dan zeggen dat we $+25$ gulden*[1] hebben. Hebben we echter een schuld van f. 25,-, dan zouden we kunnen zeggen dat we een bezit hebben van -25 gulden. We bezitten nl. die schuld. Het bedrag f. 25,- blijft echter in beide gevallen hetzelfde, alleen voor de betrokken persoon heeft het plus- en minteken betekenis. 25 gulden is dan de absolute waarde van het bedrag. De absolute waarde van $+25$ en -25 is dus 25 of korter geschreven: $|-25| = 25$; $|+25| = 25$.

Getallen met dezelfde absolute waarde, doch met tegengesteld teken, dus $+$ en $-$, noemen we <u>tegengestelde getallen</u>. Door het invoeren van de negatieve getallen zien we dat de bewerkingen optellen en aftrekken in feite dezelfde bewerkingen zijn. Immers we kunnen de aftrekking $26 - 12$ beschouwen alsof we bij het getal 26, 12 negatieve eenheden optellen, dus kunnen we ook schrijven: $26 - 12 = 26 + (-12) = 14$.

Trachten we dit weer te verduidelijken met een voorbeeld uit het dagelijkse leven en beschouwen we het getal 26 weer als een bezit van f. 26,- en het getal 12 als een schuld van f. 12,-, dan betekent f. 26,- $-$ f.12,- dat we ons bezit, f. 26,- dienen te verminderen met f. 12,-.
Ons werkelijk bezit is dus minder dan f. 26,-. We kunnen dus zeggen dat ons totale bezit is f. 26,- plus een schuld van f. 12,-, dus we bezitten f. 26,- +($-$ 12,-) = f.14,-.

Bij de aftrekking $36-(-23)$ moeten we van het positieve getal 36, 23 negatieve eenheden aftrekken. Dan is $36-(-23) = 59$.

Uit de genoemde voorbeelden kunnen we dus de algemene regel opstellen:
<u>Aftrekken is optellen met tegengesteld teken.</u>

<u>2.2.</u> <u>Het gebruik van haakjes, accoladen, blokhaken, enz.</u>

Indien in de opgaven haakjes en dergelijke voorkomen, dient men er rekening mee te houden dat de bewerking tussen die haakjes eerst uitgevoerd moeten worden. Nemen we eerst als voorbeeld de beide vormen: $45 - 17 + 20$ en $45 - (17 + 20)$. In het eerste geval wordt bedoeld: neem de som van 45 en 20, dus 65 en trek hiervan 17 af, dus $65 - 17 = 48$. In het tweede geval echter moet eerst de bewerking tussen de haakjes uitgevoerd worden, dus $45 - 37 = 7$.

Enige voorbeelden:

$58 + 27 - 36 + 10 - 15 = (58 + 27 + 10) - (36 + 15) = 95 - 51 = 44.$
$(37 - 25) - (12 - 9) = 12 - 3 = 9.$
$18 - 941 - 37) = 18 - 4 = 14.$

Heeft men in een rekenkundige bewerking verschillende soorten haakjes staan, dan luidt de afspraak, dat bij de uitwerking eerst de vormen tussen de kleine haakjes worden uitgewerkt, daarna die tussen de accoladen, dan tussen de blokhaken etc. (Heeft men in een bewerking nog meer soorten van haken nodig, dan kan men er altijd zelf enige bedenken.)

[1] Gulden: Nederlandse munteenheid die in 2002 is vervangen door de Euro. De gulden is in de tekst gehandhaafd aangezien dit voor de berekeningen geen gevolgen heeft. (1 gulden is 100 cent, 1 kwartje is 25 cent, een dubbeltje is 10 cent) FV

Voorbeeld:

$$28 - [35 + \{17 - (24 - 13) + 17\} - 29] = 28 - [35 + \{17 - 11 + 17\} - 29] =$$
$$= 28 - [35 + 23 - 29] = 28 - 29 = -1.$$

Zoals uit het voorbeeld blijkt, zijn steeds eerst de vormen tussen de haakjes, accoladen enz. geheel uitgewerkt. Het is echter ook mogelijk de opgave uit te rekenen zonder eerst de vormen tussen de haakjes uit te rekenen.

Men moet dan echter eerst de volgende afspraken maken.

Staat er een plusteken voor de haakjes, accoladen of blokhaken, dan mogen deze aanduidingen zonder meer weggelaten worden, dus:

$$+(7 - 3 + 8 - 5 - 6) = 7 - 3 + 8 - 5 - 6.$$

Staat er echter een minteken voor, dan moeten we alle tekens tegengesteld nemen, dus:

$$-(+2 - 4 + 8 - 7 - 3 + 5) = -2 + 4 - 8 + 7 + 3 - 5.$$
$$-(-5 + 3 - 4 - 6 + 8 - 2) = +5 - 3 + 4 + 6 - 8 + 2.$$

We willen de cursist er nog even opmerkzaam op maken dat, indien er voor een cijfer geen teken staat aangegeven, men dit getal altijd positief dient te nemen.

We zullen nu een aantal voorbeelden uitwerken die zorgvuldig nagewerkt dient te worden om een goed inzicht te verkrijgen.

Voorbeelden:

a. $18 + (7 + 5 - 3) - (17 + 5 - 3 - 4 - 7 + 8) =$
$= 18 + 7 + 5 - 3 - 17 - 5 + 3 + 4 + 7 - 8 = 44 - 33 = 11.$

b. $18 + (7 + 5 - 3) - (17 + 5 - 3 - 4 - 7 + 8) =$
$= 18 + 9 - (30 - 14) = 18 + 9 - 16 = 11.$

c. $28 - [35 + \{17 - (24 - 13) + 17\} - 29] =$
$= 28 - [35 + \{17 - 24 + 13 + 17\} - 29] =$
$= 28 - [35 + 17 - 24 + 13 + 17 - 29] =$
$= 28 - 35 - 17 + 24 - 13 - 17 + 29 = 81 - 82 = -1.$

d. $17 - [-28 - \{15 + (7 - 9) - 13\} + 15] - 12 =$
$= 17 - [-28 - \{15 + 7 - 9 - 13\} + 15] - 12 =$
$= 17 - [-28 - 15 - 7 + 9 + 13 + 15] - 12 =$
$= 17 + 28 + 15 + 7 - 9 - 13 - 15 - 12 = 67 - 49 = 18.$

e. Andere manier:

$17 - [-28 - 15 + (7 - 9) + 15] - 12 =$
$= 17 - [-28 - 15 - 2 - 13 + 15] - 12 =$
$= 17 - [-28 - 0 + 15] - 12 = 17 + 13 - 12 = 18.$

De cursist moet met beide methoden leren werken om voldoende routine op te doen. Nu eens biedt nl. de ene methode voordeel, dan weer de andere. Het is na enige oefening mogelijk enkele tussenbewerkingen over te slaan en zodoende de oplossingsmethode te bekorten.

Eigenschap: Een verschil verandert niet als men aftrektal en aftrekker met eenzelfde getal vermeerdert of vermindert en de eerste uitkomst met de tweede vermindert,

Deze eigenschap kan wel eens makkelijk zijn om een aftrekking uit het hoofd uit te voeren bv:

$97 - 37 = 100 - 40 = 60\,; \quad 52 - 22 = 50 - 20 = 30.$

Eigenschap: Een verschil verandert niet als men een aftrektal en aftrekker in delen splitst; de delen van de aftrekker van de overeenkomstige delen van het aftrektal aftrekt en de verkregen verschillen optelt,

bv: $95 - 48 = (80 - 40) + (15 - 8) = 40 + 7 = 47.$

Deze eigenschappen zijn niet zo belangrijk, doch men kan er soms zijn voordeel mee doen en daardoor sneller de uitkomst bepalen van een aftrekking. In verband hiermee zullen we nog enige eigenschappen vermelden waarvan men eventueel een nuttig gebruik kan maken.

Eigenschap: Een som van twee termen verandert niet als men de ene term met een getal vermeerdert, mits men de andere term met een even groot getal vermindert, bv:

$$23 + 37 = 25 + 35 = 60.$$
$$297 + 86 = 300 + 83 = 383.$$
$$1592 + 748 = 1600 + 740 = 2340.$$

Eigenschap: Men kan een verschil met een getal vermeerderen door het aftrektal met dit getal te vermeerderen of indien mogelijk de aftrekker ermee te verminderen.

De beperking "zo mogelijk" moet er in betrokken worden, aangezien het getal, waarmee we het verschil willen vermeerderen, groter dan de aftrekker kan zijn, bv:

$$(25 - 8) + 4 = (25 + 4) - 8 = 29 - 8 = 21.$$

Of $$(25 - 8) + 4 = 25 - (8 - 4) = 25 - 4 = 21.$$

$$(27 - 5) + 8 = (27 + 8) - 5 = 35 - 5 = 30.$$

Eigenschap: Een verschil wordt met een getal verminderd, indien men het aftrektal met dit getal vermindert of de aftrekker ermee vermeerdert, bv:

$$(24 - 6) - 4 = (24 - 4) - 6 = 20 - 6 = 14.$$

Of $$(24 - 6) - 4 = 24 - (6 + 4) = 24 - 10 = 14.$$

Daar de theorie die in deze les behandeld is uit meerdere gedeelten bestaat, zijn ook de vraagstukken gesplitst. Daarom moet de cursist eerst ter oefening maken 11 t/m 15.
Oplossingen inzenden van de opgaven 16 t/m 20.
Daarna:

Ter oefening maken 21 t/m 25.
Oplossingen inzenden van de opgaven 26 t/m 35.

R.T.

Rekenkunde. Les 3

3.1. Vermenigvuldigen

De vermenigvuldiging leert ons de som van enige gelijke getallen op een kortere manier vinden, dan door de gewone optelling.

In plaats van $8+8+8+8=32$ kunnen we ook schrijven $4 \times 8 = 32$. Het getal 4 dat de bewerking uitvoert, heet de vermenigvuldiger, het getal 8, dat de bewerking ondergaat, heet het vermenigvuldigtal en de uitkomst van de vermenigvuldiging heet het product (het getal 32).

De getallen 4 en 8 worden ook wel de factoren genoemd. Het is mogelijk dat een vermenigvuldiging uit meer dan twee factoren bestaat. Zo'n vermenigvuldiging heet dan een gedurig product.

Het teken dat de soort van bewerking hier aangeeft, dus het $\times$ -teken, wordt ook wel eens vervangen door een punt. In de algebra wordt meestal geen van beide tekens gebruikt, aangezien we daar veelal met letters werken, bv: ab betekent $a \times b$ of $a.b$.

In de rekenkunde echter, waar we bijna altijd met cijfers werken, moet de bewerking steeds aangegeven worden. Dus 3×7 of 3.7. Zouden we hier het $\times$ -teken of de punt weglaten, dan staat er het getal 37. Het verdient aanbeveling om in de rekenkunde steeds met het $\times$ -teken te werken, daar dan vergissingen worden uitgesloten.

We hebben nu reeds drie soorten bewerkingen leren kennen, nl. optellen, aftrekken en vermenigvuldigen. De bewerkingen die we nog moeten behandelen, zijn: delen, worteltrekken en machtsverheffen. De volgorde van bewerking is echter niet willekeurig, zodat indien we ons niet aan de voorgeschreven volgorde houden, de vraagstukken fout uitgerekend worden.

We zullen nu met behulp van een eenvoudige vuistregel (ezelsbruggetje) deze volgorde aangeven, zodat zij makkelijk te onthouden is.
Deze regel luidt:

Mijnheer Van Dalen Wacht Op Antwoord.*[2]

De hoofdletters geven de volgorde aan en wel:
1. M = Machtsverheffen.
2. V = Vermenigvuldigen.
3. D = Delen.
4. W = Worteltrekken.
5. O = Optellen.
6. A = Aftrekken.

Hieruit zien we dus dat vermenigvuldigen voorgaat op optellen en aftrekken.

$7 \times 5 + 6 = 35 + 6 = 41$; $8 \times 4 + 7 + 3 \times 6 = 32 + 7 + 18 = 57$.

Willen we aangeven dat de bewerking van het optellen of aftrekken eerst uitgevoerd moet worden, dan plaatsen we deze bewerking tussen haakjes.

$7 \times (5+6) = 7 \times 11 = 77$; $8 \times (4+7) + 3 \times 16 = 8 \times 11 + 48 = 136$;
$6 \times (5-3) = 6 \times 2 = 12$; $(8-4) \times 7 = 4 \times 7 = 28$.

Bovengenoemde bewerkingen mogen ook nog anders worden uitgevoerd met behulp van de volgende eigenschap.

---

[2] De moderne volgorde, die in de Nederlandse wiskundeschoolboeken beschreven en geoefend wordt, is:
1. haakjes
2. machtsverheffen en worteltrekken
3. vermenigvuldigen en delen
4. optellen en aftrekken

De veranderde gelijkwaardigheid van vermenigvuldigen en delen maakte niet uit voor het ezelsbruggetje omdat dit van oudsher geen aanwijzingen voor gelijkwaardigheid bevatte, ook niet voor de oude gelijkwaardigheid van optellen en aftrekken. (FV)
(bron: Wikipedia)

<u>Eigenschap:</u> Een som of verschil wordt vermenigvuldigd met een getal door elke term van de som of het verschil met dat getal te vermenigvuldigen. Dus:

$7 \times (5+6) = 35 + 42 = 77$; $8 \times (4+7) = 32 + 56 = 88$;
$6 \times (5-3) = 30 - 18 = 12$; $(8-4) \times 7 = 56 - 28 = 28.$

Bij een vermenigvuldiging verandert het product niet, indien men de factoren verwisselt, dus:

$3 \times 5 = 5 \times 3$; $7 \times 3 \times 9 = 3 \times 9 \times 7 = 3 \times 7 \times 9.$

Met behulp van deze regel is het dus mogelijk het product te vinden van enige factoren, waarbij we de volgorde zo kiezen dat de uitkomst zo snel en zo eenvoudig mogelijk tevoorschijn komt.

Bij de vermenigvuldiging is er nog een belangrijke eigenschap die we willen vermelden en wel: Een product wordt met een getal vermenigvuldigd daar <u>één</u> de factoren met dit getal te vermenigvuldigen en de andere onveranderd te laten.

$$7 \times (3 \times 4 \times 2) = 21 \times 4 \times 2 = 168.$$
$$7 \times (3 \times 4 \times 2) = 3 \times 28 \times 2 = 168.$$
$$7 \times (3 \times 4 \times 2) = 3 \times 4 \times 14 = 168.$$

Men lette er goed op dat dus slechts één der factoren de bewerking ondergaat in tegenstelling dus met de eigenschap van het vermenigvuldigen van een getal met een som of product, waar iedere term met dat getal vermenigvuldigd wordt.

<u>3,2.</u> <u>Het vermenigvuldigen zowel met positieve als met negatieve getallen</u>

Wordt een positief getal vermenigvuldigd met een ander positief getal, dan is het product ook positief.

Wordt een negatief getal vermenigvuldigd met een ander negatief getal, dan is de uitkomst positief.

Wordt een positief getal vermenigvuldigd met een negatief getal, dan is de uitkomst negatief. Schematisch kunnen we dit als volgt het beste onthouden:

$$+ \times + = +$$
$$- \times - = +$$
$$+ \times - = -$$
$$- \times + = -$$

Bij een gedurig product, dus een product dat uit meer dat twee factoren bestaat, kunnen we het teken van de uitkomst direct en eenvoudig bepalen, door het aantal te vermenigvuldigen mintekens op te tellen. Is het aantal mintekens oneven, dan is de uitkomst negatief, is het aantal tekens even, dan is de uitkomst positief.

<u>Voorbeelden:</u>

<u>a.</u> $-3 \times +7 \times -5 \times -2 = -210$ (3 mintekens, dus oneven aantal).
<u>b.</u> $-2 \times -4 \times +5 \times +10 = 400$ (2 mintekens, dus even aantal).
<u>c.</u> $3 \times -5 + 7 - 4 \times 6 = -15 + 7 - 24 = 7 - 39 = -32.$
<u>d.</u> $-2 \times -7 - 5 \times -3 = 14 + 15 = 29.$

De cursist lette goed op de voorbeelden c en d, daar hiermee zeer vaak fouten worden gemaakt.

R.T.

9 Rk

De vermenigvuldigingen, optellingen en aftrekkingen met positieve en negatieve getallen komen ook in de algebra herhaaldelijk voor.

We zullen een en ander nog eens goed onder de loep nemen en twee voorbeelden behandelen.

$-5\{3 + 7 \times -8 + 4(2 - 6) + 7 \times -3 + 4 - 2\} + 5 - 7 \times 8 =$
$= -5\{3 - 56 + 4 \times -4 - 21 + 4 - 2\} + 5 - 56 =$
$= -5\{-53 - 16 - 19\} - 51 = -5 \times -88 - 51 = 440 - 51 = 389.$

$-3\{+5 - 7(8 - 5) - 4(2 - 3)\} + 2\{5 - 6(4 - 5) + 3(4 - 6)\} + 54 =$
$= -3\{+5 - 7 \times 3 - 4 \times -1\} + 2\{5 - 6 \times -1 + 3 \times -2\} + 54 =$
$= -3\{+5 - 21 + 4\} + 2\{5 + 6 - 6\} + 54 =$
$= -3 \times -12 + 2 \times 5 + 54 = +36 + 10 + 54 = 100.$

Ter oefening maken de opgaven 36 t/m 39.
Oplossingen inzenden van de opgaven 40 t/m 45.

4,1. Machtsverheffen

Een macht is een verkorte schrijfwijze voor een product of een gedurig product van een aantal gelijke factoren. Zo kunnen we voor $5 \times 5 \times 5 \times 5$ korter schrijven 5^4 ; $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$ enz. We onderscheiden hier weer (zie les 1) grondtal en exponent.

Bij de behandeling van de machten van tien in les 1 hebben we reeds gezien dat bij het product van twee of meer machten met hetzelfde grondtal er weer een macht ontstaat met hetzelfde grondtal en met als exponent de som der exponenten der oorspronkelijke machten.

$2^3 \times 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$.
$2^5 \times 2^3 \times 2^7 = 2^{15}$; $3^4 . 3^8 . 3^6 = 3^{18}$.
$7^3 . 7^2 . 7^5 . 7^8 . 5^2 . 5^3 . 5^4 . 3^6 . 3^9 . 3^2 = 7^{18} . 5^9 . 3^{17}$.

Wanneer een product tot een macht verheven moet worden kunnen we dit doen door ieder der factoren tot die macht te verheffen.

$(2 \times 5 \times 8)^4 = 2^4 . 5^4 . 8^4$.

Eigenschap: Als een macht van een getal weer tot een macht verheven wordt, verkrijgt men een nieuwe macht van dat getal, met als exponent het product der exponenten.

We kunnen dit als volgt aantonen:

$(4^3)^5 = 4^3 . 4^3 . 4^3 . 4^3 . 4^3 = 4^{3+3+3+3+3} = 4^{15}$; dus: $(5^2)^3 = 5^6$; $(6^4)^7 = 6^{28}$; $(2^3)^3 = 2^9$.

Het machtsverheffen met negatieve grondtallen geeft weer dezelfde eigenschappen als bij het vermenigvuldigen, d.w.z. is de exponent van het negatieve grondtal even, dan is de uitkomst positief, is de exponent oneven, dan is de uitkomst negatief.

$(-3)^7 = -3^7$; $(-3)^8 = 3^8$; $(-5)^6 = 5^6$ en $(-5)^3 = -5^3$.

4,2. Delen

Stel eens, dat we onder 3 jongens 15 appels moeten verdelen, zodanig dat iedere jongen evenveel appels krijgt. Daar $3 \times 5 = 15$, blijkt hier dus uit, dat iedere jongen 5 appels krijgt.

We kunnen ook zeggen dat iedere jongen het derde deel van de totale hoeveelheid appels krijgt, dus het derde deel van 15 is 5 of 15 gedeeld door 3 is 5.

Dit kunnen we allemaal korter schrijven door voor de uitdrukking “gedeeld door” het teken ÷ te gebruiken, of een zogenaamde deelstreep, dus:

$15 \div 3 = 5$ *of* $\frac{15}{3} = 5$.

De uitkomst van een deling heet het quotiënt. Het getal dat de bewerking uitvoert, (het getal 3) heet de deler en het getal dat de bewerking ondergaat, (het getal 15) heet het deeltal. We vinden dus:

$$\frac{\text{deeltal}}{\text{deler}} = \text{quotiënt}.$$

Tevens volgt hieruit dat deeltal = quotiënt × deler. Hadden de jongens uit bovenstaand voorbeeld 16 appels te verdelen gehad, dan was dus een verdeling niet mogelijk geweest, als we voorop stellen dat de appels niet doorgesneden mogen worden. Er was dus één appel overgebleven. In het eerste voorbeeld spreken we over een opgaande deling, in het tweede voorbeeld over een niet-opgaande deling.

Bij een niet-opgaande deling noemen we de hoeveelheid die overblijft de rest, hiervoor geldt dan: deeltal = deler × quotiënt + rest.

Indien we een som of verschil of algemener een veelterm door een getal moeten delen, kunnen we dit op twee manieren oplossen.

We kunnen nl. eerst de gehele veelterm uitrekenen en de uitkomst door het getal delen.
$(16 - 4 + 8 - 6) \div 2 = 14 \div 2 = 7.$
Het is echter ook mogelijk eerst iedere term van de veelterm door het getal te delen en daarna de termen van de veelterm samen te voegen.
$(16 - 4 + 8 - 6) \div 2 = 8 - 2 + 4 - 3 = 7.$

De eerste methode zal in de meeste gevallen de voorkeur verdienen, daar deze vlugger en met minder kans op fouten uitgevoerd kan worden dan de tweede methode.

<u>Eigenschap:</u> Men kan een product van twee of meer getallen door een getal delen, door één der factoren door dat getal te delen.

$$\frac{12 \times 15}{6} = 2 \times 15 = 30.$$

Bij de deling zoals in het bovenstaande voorbeeld, hebben we gebruik gemaakt van de deelstreep. Het getal boven de deelstreep noemen we de teller, het getal onder de deelstreep de noemer, het geheel heet een breuk.

Evenals bij het machtsverheffen en het vermenigvuldigen de negatieve getallen beschouwd zijn, doen we dit bij het delen. We houden ons weer aan de regel: is het aantal mintekens oneven, dan is de uitkomst negatief, is het aantal mintekens even, dan is de uitkomst positief. We geven dit symbolisch als volgt aan:

$$\frac{+}{+} = + \;; \quad \frac{-}{-} = + \;; \quad \frac{+}{-} = - \;; \quad \frac{-}{+} = -.$$

4,3. Staartdelingen

Indien we twee grote getallen op elkaar moeten delen, maken we gebruik van de zogenaamde staartdelingen.

$$\begin{array}{r|l|l} 237 & 37446 & 158 \\ & \underline{237} & \\ & 1347 & \\ & \underline{1185} & \\ & \;\;1896 & \\ & \;\;\underline{1896} & \\ & \quad\;\;\; 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l|l} 324 & 15687 & 48{,}41 \\ & \underline{1296} & \\ & \;\;2727 & \\ & \;\;\underline{2592} & \\ & \quad 1350 & \\ & \quad \underline{1296} & \\ & \quad\;\; 540 & \\ & \quad\;\; \underline{324} & \\ & \quad\;\; 216 & \end{array}$$

De ene deling is een opgaande deling, de andere echter niet. Bij de niet-opgaande deling zouden we nog zeer veel getallen achter de komma kunnen uitrekenen. Deze getallen heten decimalen. Echter wanneer nu in een vraagstuk gegeven staat, bv: bereken de deling tot op 2 decimalen nauwkeurig, dan moet men de eerstopvolgende decimaal ook uitrekenen, is deze decimaal kleiner dan 5, dan mag deze verwaarloosd worden.

Is deze decimaal echter 5 of hoger, dan wordt het voorgaande getal met 1 verhoogd.
De uitkomst van de niet-opgaande deling is dus in twee decimalen nauwkeurig 48,42 en in één decimaal 48,4.

Als samenvatting kunnen we het tot nu toe geleerde met letters als volgt voorstellen.

$a^m . a^n = a^{m+n}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{mn}$

Ter oefening maken de opgaven 46 t/m 50.
Oplossingen inzenden van de opgaven 51 t/m 60.

HILVERSUM

5.1. Deelbaarheid

Een getal is deelbaar door een ander getal als de rest der deling gelijk aan nul is.
Een getal dat alleen deelbaar is door 1 en door zichzelf heet een ondeelbaar getal.

Ondeelbare getallen zijn: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 enz. Deze ondeelbare getallen worden ook wel de priemgetallen genoemd.

Indien dus een getal geen priemgetal is, is dat getal door 1 of meer getallen deelbaar.
Daar het dikwijls lastig is te onderzoeken of een bepaald getal deelbaar is en men het dus steeds moet "proberen", is er een aantal eigenschappen ontworpen waarmee men tamelijk vlug kan onderzoeken of het getal deelbaar is door een ander getal. Deze kenmerken van deelbaarheid zullen we niet afleiden of bewijzen.
De cursist dient ze echter goed uit het hoofd te leren, daar hij daar zeer veel profijt van heeft.

5.2. Kenmerken van deelbaarheid

Hier volgen de voornaamste kenmerken van deelbaarheid:

1. Een getal is deelbaar door twee, als het cijfer der eenheden deelbaar is door 2, dus als het getal even is.
2. Een getal is deelbaar door 3, als de som der cijfers deelbaar is door 3.
3. Een getal is deelbaar door 4, als het getal gevormd door de laatste twee cijfers deelbaar is door 4.
4. Een getal is deelbaar door 5, als het laatste cijfer van het getal een nul of een vijf is.
5. Een getal is deelbaar door 8, als het getal gevormd door de laatste drie cijfers deelbaar is door 8.
6. Een getal is deelbaar door 9, als de som der cijfers deelbaar is door 9.
7. Een getal is deelbaar door 10, als het laatste cijfer van het getal een nul is.
8. Een getal is deelbaar door 11, als de som der cijfers op de oneven plaatsen, verminderd met de som der cijfers op de even plaatsen, nul is of een elfvoud.
9. Een getal is deelbaar door 25, als het getal gevormd door de laatste twee cijfers deelbaar is door 25.
10. Een getal is deelbaar door 125, als het getal gevormd door de drie laatste cijfers deelbaar is door 125.

Uit de kenmerken van deelbaarheid kunnen diverse combinaties gemaakt worden.
Bijvoorbeeld: Een getal zal deelbaar zijn door 6, als het getal even is en de som der cijfers deelbaar is door 3.

Een getal zal deelbaar zijn door 45, als het laatste cijfer een nul of een 5 is, terwijl de som der cijfers deelbaar moet zijn door 9.

Het kenmerk van deelbaarheid door 7 is niet vermeld, aangezien dit zo ingewikkeld is dat men de deelbaarheid door 7 beter en sneller door proberen kan onderzoeken.

Voorbeeld: Bepaal de waarde(n) van p en q, van het getal $52p68q$, opdat het getal deelbaar is door 72.
Oplossing: Het getal moet dus deelbaar zijn door 8 en door 9. Het getal is deelbaar door 8, als het getal gevormd door de laatste drie cijfers dus $68q$ deelbaar is door 8. Bij het uitdelen blijkt dan dat indien $q = 0$ of $q = 8$ het genoemde getal resp. 680 en 688 deelbaar is door 8.
De getallen worden nu $52p680$ of $52p688$.

Van het getal $52p680$ is de som der cijfers $21 + p$. Dit getal is deelbaar door 9, als $p = 6$ is. Dus het getal wordt dan 526680.

Van het getal $52p688$ is de som der cijfers $29 + p$. Dit getal is deelbaar door 9, als $p = 7$ is. Dus wordt het getal 527688. We vinden hier dus twee oplossingen die voldoen.

5.3.Ontbinden in factoren

Onder de ontbinding van een getal in factoren, verstaan we de splitsing van het getal in factoren die zelf niet meer te ontbinden zijn, dus in de zogenaamde priemgetallen.

Het getal 36 bijvoorbeeld kan ontbonden worden in de factoren 4 en 9 dus $36 = 4 \times 9$, maar dit zijn geen priemgetallen, zodat de ontbinding verder doorgezet moet worden nl:
$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \,.\, 3^2$.

Om grote getallen in factoren te ontbinden, gaan we als volgt te werk:

$$
\begin{array}{l|r}
2 & 36036 \\
2 & 18018 \\
3 & 9009 \\
3 & 3003 \\
7 & 1001 \\
11 & 143 \\
 & 13
\end{array}
\quad \text{dus: } 36036 = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13.
$$

We onderzoeken het getal met behulp van de kenmerken van deelbaarheid. Het getal waardoor het deelbaar is, zetten we voor de streep, daarna voeren we de deling uit. Na deze bewerking onderzoeken we of hetzelfde getal er nogmaals op deelbaar is enz. Is dit niet het geval, dan gaan we naar het volgende priemgetal over, net zo lang tot we een ondeelbaar getal overhouden.

Voorbeeld: Het getal $2p80q$ geeft bij deling door 75 een rest van 30.
Bepaal de waarde(n) van p en q.

Oplossing: Het getal geeft bij deling dus een rest van 30. Indien we dit teveel van het getal zelf aftrekken, is het getal deelbaar door 75.
Het getal wordt dan $2p80q - 30 = 2p77q$.

Het getal is deelbaar door 25, als $7q$ deelbaar is door 25, dus moet $q = 5$ zijn.
Het getal wordt dan $2p775$.

Het getal $2p775$ is deelbaar door 3 als de som der cijfers dus $21 + p$ deelbaar is door 3.
p kan dus zijn: 0, 3, 6 of 9. De getallen worden dan:

20775; 23775; 26775; 29775.

Ter oefening maken 61 t/m 65.
Oplossingen inzenden van de opgaven 66 t/m 70.

6.1. Grootste gemene deler

Een getal dat op twee of meer andere getallen deelbaar is, heet een gemene deler van die getallen. (het woord gemeen heeft hier de betekenis van gemeenschappelijk.)

Zo is bv. 4 een gemene deler van 8, 12, 16, 20 enz. Het grootste getal dat op twee of meer getallen deelbaar is, heet de grootste gemene deler. De uitdrukking ‘grootste gemene deler’ wordt meestal aangegeven door de letters G.G.D.

De G.G.D. van enige getallen is gelijk aan het product van de gemeenschappelijk factoren van die getallen tot de laagste exponent, waarmee die factoren in een van die getallen voorkomt.

Stel, we hebben een aantal gegeven getallen in factoren ontbonden, bijvoorbeeld:

$2^3.3^4.5.7^4$; $2^5.3^2.5^4.7^2.11^3$; $2^4.3^5.5^3.11^4.13^5$. Dan is de G.G.D. van deze getallen $2^3.3^2.5$. Dit wil dus zeggen dat het getal $2^3.3^2.5 = 360$ deelbaar is op ieder der gegeven getallen en dat er wel kleinere getallen dan 360 bestaan, die op elk der gegeven getallen deelbaar zijn, doch geen groter getal.

Nu is het mogelijk dat een aantal getallen geen gemeenschappelijke factoren heeft, dan is de G.G.D.= 1. Er is altijd een G.G.D.

Moeten we de G.G.D. bepalen van twee grote getallen, zodat de ontbinding in factoren een tijdrovende bezigheid wordt, dan passen we een bepaald systeem toe , dat we niet zullen bewijzen, doch alleen maar aan zullen geven.

Deel het kleinste getal op het grootste, stel we houden dan een rest over, deel die rest op het kleinste getal, enz., tot de deling opgaat. De laatste deler is dan de G.G.D.

Voorbeeld: Wat is de G.G.D. van 7429 en 3587?

```
3587 / 7429 \ 2
       7174
        255 / 3587 \ 14
              255
              1037
              1020
                17 / 255 \ 15
                     17
                      85
                      85
                       0
```

De G.G.D. is nu 17.

Dit is een zeer eenvoudige methode, die we altijd toepassen indien we van twee grote getallen de G.G.D. moeten bepalen.

6.2. Kleinste gemene veelvoud

Het getal 60 is o.a. deelbaar door 30, 15, 10 en 6. We noemen nu 60 een gemeen veelvoud van 30, 15, 10 en 6. Zo zijn ook 120, 180 enz. gemene veelvouden van de genoemde getallen. Het kleinste getal nu dat door enige getallen deelbaar is, noemt men het kleinste gemene veelvoud (K.G.V.).

Eigenschap: het K.G.V. van enige getallen is gelijk aan het product van de ondeelbare factoren, die in die getallen voorkomen, ieder met de hoogste exponent, die hij in één van die getallen heeft.

Nemen we weer een aantal getallen dat reeds in factoren ontbonden is bv:

$2^8.3^3.5^4$; $2^6.3^5.5^2.7^3.11^2$ en $2^3.3^2.7^5.13^5$, dan is het K.G.V. $= 2^8.3^5.5^4.7^5.11^2.13^5$.

Eigenschap: Het K.G.V. van twee getallen is gelijk aan het product, gedeeld door de G.G.D. van die twee getallen. Van deze eigenschap kunnen we gebruik maken om van twee getallen die moeilijk te ontbinden zijn het K.G.V. te bepalen.

Voorbeeld: Wat is het K.G.V. van de getallen 5046 en 6728?
We gaan eerst de G.G.D. bepalen.

$$\begin{array}{l} 5046 \,/\, 6728 \,\backslash\, 1 \\ \qquad\quad \underline{5046} \\ \qquad\quad 1682 \,/\, 5046 \,\backslash\, 3 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{5046} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Dus de G.G.D. $= 1682$.

Dan is het K.G.V. $= \frac{5046 \times 6728}{1682} = 3 \times 6728 = 20184$.

6,3. Breuken

In plaats van de deling $5 \div 12$ kunnen we ook schrijven $\frac{5}{12}$. Hierin heet het gedeelte boven de deelstreep de teller, het gedeelte onder de deelstreep heet de noemer; het geheel heet een breuk. Indien bij een breuk de teller deelbaar is door de noemer, dan noemen we dit een oneigenlijke breuk bv. $\frac{12}{3} = 4$.

Is van een breuk de teller kleiner dan de noemer, dan heet zo'n breuk een echte breuk, is echter de teller groter dan de noemer, dan heet dit een onechte breuk.

Een zeer belangrijke regel bij de breuken is dat men teller en noemer van een breuk door eenzelfde getal mag delen, we noemen dit het vereenvoudigen van de breuk. Om te kunnen zien welk getal zo groot mogelijk genomen, op teller en noemer deelbaar is, met andere woorden om de breuk zoveel mogelijk te vereenvoudigen, gaan we de G.G.D. van teller en noemer oplossen en vereenvoudigen daarna de breuk, door beide door hun G.G.D. te delen.

Bij de breuken geldt ook weer, zoals we reeds bij de deling gezien hebben, dat indien de teller of de noemer uit een negatieve grootheid bestaat, dus één minteken, de breuk negatief is.

Is zowel de teller als de noemer negatief, dus een even aantal mintekens, dan is de breuk positief, dus:

$$\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}\,; \quad \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}\,; \quad \frac{-3}{-5} = +\frac{3}{5}\,.$$

Uit bovenstaande voorbeelden zien we dat het uiteindelijke teken van de breuk voor de breukstreep geplaatst wordt.

Bij de breuken zien we dus reeds direct dat we een nuttig gebruik van de G.G.D. kunnen maken om de breuken te vereenvoudigen.
In de volgende les zullen we zien hoe ook het K.G.V. bij de breuken gebruikt wordt.

Ter oefening maken de opgaven 71 t/m 74.
Oplossingen inzenden van de opgaven 75 t/m 79.

7.1. Som en verschil van breuken

In de vorige les hebben we gezien dat teller en noemer van een breuk door eenzelfde getal gedeeld mogen worden. Omgekeerd is het ook mogelijk teller en noemer met eenzelfde getal te vermenigvuldigen, zonder dat de waarde van de breuk verandert.

Breuken, die dezelfde noemer hebben, heten gelijknamige breuken, breuken die niet dezelfde noemer hebben, heten ongelijknamige breuken.

Nu kunnen we altijd ongelijknamige breuken gelijknamig maken met behulp van bovenstaande eigenschap, dat teller en noemer van een breuk met eenzelfde getal vermenigvuldigd mogen worden.

De gelijknamige noemer van twee of meer noemers is dan het K.G.V. van die noemers.
Stel, dat gevraagd wordt de volgende breuken gelijknamig te maken:

$$\frac{1}{3}; \quad \frac{3}{4}; \quad \frac{2}{5}; \quad \frac{3}{10}; \text{ en } \frac{11}{30}.$$

We zoeken nu eerst het K.G.V. van de noemers op, dit is 60, dus de gelijknamige noemer is 60. De breuken worden dan:

$$\frac{20}{60}; \quad \frac{45}{60}; \quad \frac{24}{60}; \quad \frac{18}{60}; \text{ en } \frac{22}{60}.$$

Willen we bv. weten van twee breuken welke de grootste is, dan gaan we deze breuken eerst gelijknamig maken en bekijken daarna van welke breuk de teller het grootste is.
Bijvoorbeeld: $\frac{3}{5}$ en $\frac{5}{7}$; dit wordt $\frac{21}{35}$ en $\frac{25}{35}$, dus: $\frac{5}{7}$ is groter dan $\frac{3}{5}$.

Bij de optelling en aftrekking gaan we de breuken eerst gelijknamig maken en tellen dan de tellers bij elkaar op bij de optelling, of trekken de tellers van elkaar af bij de aftrekking.
Eigenschap: De som van enige gelijknamige breuken is een nieuwe breuk, die dezelfde noemer heeft als die breuken en waarvan de teller gelijk is aan de som van de tellers.

Voorbeeld: $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{11}{30}=\frac{20}{60}+\frac{45}{60}-\frac{24}{60}+\frac{18}{60}-\frac{22}{60}=$
$\frac{20+45-24+18-22}{60}=\frac{37}{60}$.

Men werkt het snelste als men de tweede vorm niet opschrijft, doch direct de gemeenschappelijke noemer. Het teken dat tussen de breuken staat , komt dus tussen de respectievelijke tellers te staan.

Nemen we nu eens een breuk waarvan we de teller groter is dan de noemer bv. $\frac{27}{4}$.
We kunnen dan zeggen, dat de breuk bestaat uit 6 eenheden en 3 breukeenheden, dus:
$\frac{24}{4}+\frac{3}{4}=6+\frac{3}{4}=6\,\frac{3}{4}$. zulk een vorm heet een gemengd getal.

Elk gemengd getal kan geschreven worden als een breuk, bv: $8\frac{1}{3}=\frac{25}{3}$; $2\frac{4}{7}=\frac{18}{7}$ enz.
Bij de aftrekking van breuken, die beide of één van beide gemengde getallen zijn, onderscheiden we twee gevallen.

1e. De breuk in het aftrektal is groter dan die in de aftrekker:

$$6\frac{8}{15}-3\frac{4}{15}=6-3+\frac{8}{15}-\frac{4}{15}=3\frac{4}{15}.$$

2e. De breuk in het aftrektal is kleiner dan die in de aftrekker:

$$5\frac{1}{5}-3\frac{7}{8}=5\frac{8}{40}-3\frac{35}{40}=4\frac{48}{40}-3\frac{35}{40}=1\frac{13}{40}.$$

We moeten dus een tussenbewerking uitvoeren, omdat we $\frac{35}{40}$ niet kunnen aftrekken van $\frac{8}{40}$ zonder negatieve getallen te verkrijgen. Dit is niet nodig, aangezien er nog eenheden ter beschikking waren om de breuk te vergroten.

R.T.

17 Rk Nadruk verboden

Voorbeeld: $7\frac{1}{12}+5\frac{1}{6}-\left(8\frac{1}{3}-13\frac{7}{9}\right)-\left(1\frac{2}{3}-\frac{-5}{12}\right)=7\frac{1}{12}+5\frac{2}{12}-\left(8\frac{3}{9}-13\frac{7}{9}\right)-\left(1\frac{8}{12}+\frac{5}{12}\right)=$
$=12\frac{3}{12}-\left(-5\frac{4}{9}\right)-1\frac{13}{12}=12\frac{3}{12}+5\frac{4}{9}-2\frac{1}{12}=10\frac{2}{12}+5\frac{4}{9}=$
$=10\frac{1}{6}+5\frac{4}{9}=10\frac{3}{18}+5\frac{8}{18}=15\frac{11}{18}.$

7,2. Vermenigvuldigen van breuken

Een breuk wordt met een getal vermenigvuldigd door de teller ermee te vermenigvuldigen en de noemer onveranderd te laten, bv: $3\times\frac{2}{7}=\frac{6}{7}$.
Ontstaat er een gemeenschappelijke factor in teller en noemer, doordat de vermenigvuldiger eenzelfde factor bezit als de noemer, dan kan direct door die gemeenschappelijke factor gedeeld worden.
$6\times\frac{7}{27}=2\times\frac{7}{9}=\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}$.
Komen er bij de vermenigvuldiging negatieve getallen voor, dan volgen we normale regels, zoals in voorgaande lessen aangegeven.

Worden twee breuken met elkaar vermenigvuldigd, dan wordt de uitkomst weer een breuk, met als teller het product der afzonderlijke tellers en als noemer het product der afzonderlijke noemers, dus: $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$.
Ditzelfde geldt voor het vermenigvuldigen van meerdere breuken met elkaar.
$\frac{4}{7}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{11}=\frac{4\times2\times3}{7\times5\times11}=\frac{24}{385}$. Men dient er wel goed op te letten of er gemeenschappelijke factoren bij de tellers en de noemers voorkomen. Indien dit het geval is, gaan we deze gemeenschappelijke factoren er eerst uitdelen, hetgeen een aanzienlijke besparing aan rekenwerk oplevert. We doen dit door de gemeenschappelijke factoren uit teller en noemer weg te strepen en het getal dat overblijft er boven te vermelden.
$\frac{\cancel{17}^{1}}{\cancel{23}_{1}}\times\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{3}_{1}}\times\frac{\cancel{69}^{\cancel{3}}}{\cancel{85}_{\cancel{5}}}=1.$
17 is gedeeld op 85, dit gaat 5 maal, deze 5 kan dan weer worden weggedeeld tegen de 5 in de teller.
23 is gedeeld op 69, dit gaat 3 maal. Deze 3 kan weer worden weggedeeld tegen de 3 in de noemer.
De uitkomst is dus 1.
Men lette er goed op dat er 1 uitkomt en niet nul. Zit nl. het getal nul zelf niet in de teller, dan kan er uit een vermenigvuldiging of deling nooit nul als uitkomst komen.

Nog twee voorbeelden:

$$\frac{7}{12}+\left(\frac{15}{24}-\frac{7}{8}+\frac{8}{3}\right)\times\frac{2}{29}\div\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{8}+\frac{5}{16}-\frac{1}{32}\right)=$$
$$=\frac{7}{12}+\left(\frac{15-21+64}{24}\right)\times\frac{2}{29}\div\frac{2}{5}\times\left(\frac{24-28+10-1}{32}\right)=$$
$$=\frac{7}{12}+\frac{58}{24}\times\frac{2}{29}\div\frac{2}{5}\times\frac{5}{32}=\frac{7}{12}+\frac{1}{6}\div\frac{1}{16}=\frac{7}{12}+\frac{16}{6}=\frac{7+32}{12}=\frac{39}{12}=3\frac{3}{12}=3\frac{1}{4}.$$

$$\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{8}-\frac{7}{16}+\frac{3}{4}\right)\times8+\frac{6}{5}\times\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{15}-\frac{3}{10}\right)\times25=$$
$$=\frac{3}{4}+\left(\frac{10-7+12}{16}\right)\times8+\frac{6}{5}\times\left(\frac{24+4-9}{30}\right)\times25=$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{15}{16}\times\div8+\frac{6}{5}\times\frac{19}{30}\times25=\frac{3}{4}+\frac{15}{2}+19=\frac{3}{4}+7\frac{2}{4}+19=26\frac{5}{4}=27\frac{1}{4}.$$

Ter oefening maken de opgaven 80 t/m 83.
Oplossingen inzenden van de opgaven 84 t/m 87.

R.T.

Rekenkunde. Les 8

HILVERSUM

8,1. Machten van breuken

Daar het gedurig product van een aantal breuken gelijk is aan het gedurig product van de tellers gedeeld door het gedurig product van de noemers, zal de macht van een breuk gelijk zijn aan de macht van de teller gedeeld door de macht van de noemer met dezelfde exponent.

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}=\frac{2^3}{3^3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Moet een gemengd getal tot een macht gebracht worden, dan maakt men eerst van het gemengde getal een beuk.

$$\left(4\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{14^2}{3^2}=\frac{196}{9}=21\frac{7}{9}.$$

Voorbeeld: $\frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^5\times 3^2=\frac{\cancel{3}}{4}\times\frac{\cancel{3}^{\cancel{2}}}{4^2}\times\frac{1}{\cancel{3}^{\cancel{3}}}\times\frac{1}{4^2}\times\frac{2^5}{3^{\cancel{5}}3}\times\cancel{3}^{\cancel{2}}=$

$$=\frac{2^5}{2^2\times2^4\times2^4\times3^3}=\frac{1}{2^5\times3^3}=\frac{1}{864}.$$

(Immers $4^2=(2^2)^2=2^4$, machtsverheffen is vermenigvuldigen van de exponenten.)

8,2. Delen van breuken

Bij de vermenigvuldiging hebben we gezien, dat een breuk met een getal vermenigvuldigd wordt door of de teller met dat getal te vermenigvuldigen, of de noemer door dat getal te delen.
Bij deling van een breuk door een getal vinden we juist het omgekeerde nl. een breuk wordt door een getal gedeeld door of de noemer met dat getal te vermenigvuldigen, of de teller door dat getal te delen.

Als vuistregel kunnen we het volgende onthouden:

Delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde, bv:

$\frac{6}{7}\div 2=\frac{6}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$; $\quad\frac{5}{8}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{8}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{16}$.

Omgekeerde waarden worden ook wel reciproke waarde genoemd. De reciproke waarden van 2, 7, 11 enz. zijn dus resp: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$ en $\frac{1}{11}$.

Voorbeeld:

a. $\frac{2^3.3^4.5^2}{7^8}\div 2^2.3^2.5^2.7^2=\frac{2^3.3^4.5^2}{7^8}\times\frac{1}{2^2.3^2.5^2.7^2}=\frac{2.3^2}{7^{10}}$.

b. $\frac{12\times(-16)\times18}{36\times40}\div 5\times -6=-\frac{12\times16\times18}{36\times40}-\frac{1}{5\times6}=$

$=\frac{12\times16\times18}{36\times40\times5\times6}=\frac{2}{25}$.

8,3. Samengestelde breuken

Bestaat van een breuk de teller, of de noemer, of beide uit een gebroken getal, dan heet dit een samengestelde breuk. In tegenstelling tot de samengestelde breuken, heten de gebroken getallen enkelvoudige breuken.

Door gebruik te maken van de regel dat teller en noemer van een breuk met eenzelfde getal vermenigvuldigd mogen worden, kan iedere samengestelde breuk tot een enkelvoudige herleid worden. Men vermenigvuldigt dan de teller en de noemer van de samengestelde breuk met het K.G.V. der noemers van de afzonderlijke breuken van teller en noemer.

Voorbeeld:

a. $\frac{2\frac{1}{5}}{3\frac{2}{3}}=\frac{\frac{11}{5}}{\frac{11}{3}}=\frac{\frac{33}{15}\times15}{\frac{55}{3}\times15}=\frac{33}{55}=\frac{3}{5}$.

b. $\dfrac{2\frac{1}{4}-1\frac{1}{3}}{5\frac{1}{2}-1\frac{1}{6}} = \dfrac{2\frac{3}{12}-1\frac{4}{12}}{5\frac{6}{12}-1\frac{2}{12}} = \dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{52}{12}} = \dfrac{\frac{11}{12}\times 12}{\frac{52}{12}\times 12} = \dfrac{11}{52}$.

Eenvoudiger is echter om gebruik te maken van de regel: delen is vermenigvuldigen met de omgekeerde waarde.

In voorbeeld a. hadden we gekregen: $\dfrac{\frac{11}{5}}{\frac{11}{3}} = \frac{11}{5}\times\frac{3}{11} = \frac{3}{5}$.

In voorbeeld b: $\dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{52}{12}} = \frac{11}{12}\times\frac{12}{52} = \frac{11}{52}$.

Voorbeeld c. $\dfrac{10\frac{2}{3}\times\frac{7}{16}}{5\frac{1}{3}-2\frac{2}{9}} \times \dfrac{6\frac{3}{4}\times 3\frac{5}{9}}{4\frac{1}{4}-3\frac{1}{3}} \div \dfrac{5\frac{1}{3}}{4\frac{5}{7}} \times \dfrac{3^3}{7} = \dfrac{\frac{32}{3}\times\frac{7}{16}}{5\frac{3}{9}-2\frac{2}{9}} \cdot \dfrac{\frac{27}{4}\times\frac{32}{9}}{3\frac{15}{12}-3\frac{4}{12}} \cdot \dfrac{\frac{33}{7}}{\frac{16}{3}} \cdot \dfrac{7}{3^3} =$

(Let op, na het deelteken hebben we met het omgekeerde vermenigvuldigd.
Daar vermenigvuldigen voorgaat op delen, wordt ook het gedeelte $\frac{3^3}{7}$ omgekeerd.)

$\dfrac{\frac{14}{3}}{3\frac{1}{9}} \times \dfrac{24}{\frac{11}{12}} \times \dfrac{\frac{33}{7}}{\frac{16}{3}} \times \dfrac{7}{3^3} = \frac{14}{3}\times\frac{9}{28}\times 24\times\frac{12}{11}\times\frac{33}{7}\times\frac{3}{16}\times\frac{7}{27} = 9.$

8.4. Kettingbreuken

$$2+\cfrac{5}{4+\cfrac{3}{7+\frac{5}{6}}}$$

Een breuk waarvan de noemer weer uit een samengestelde breuk bestaat, verbonden door plus- en mintekens en waarvan de noemer weer een breuk is, noemen we een kettingbreuk.

Bij de vereenvoudiging van dergelijke breuken begint men rechts beneden de samengestelde breuk om te zetten tot een enkelvoudige breuk. Zo gaan we door, totdat de gehele breuk herleid is tot een enkelvoudige breuk of een gemengd getal.

We zullen bovenstaand vraagstuk als voorbeeld uitwerken.

$$2+\cfrac{5}{4+\cfrac{3}{7+\frac{5}{6}}} = 2+\cfrac{5}{4+\cfrac{3}{7\frac{5}{6}}} = 2+\cfrac{5}{4+\frac{18}{47}} = 2+\cfrac{5}{4\frac{18}{47}} = 2+\frac{235}{206} = 3\frac{29}{206}.$$

Men lette er goed op de deelstrepen op dezelfde hoogte als de plus- en mintekens te plaatsen, daar anders snel verwarringen op zullen treden.

Ter verduidelijking zullen we nog een voorbeeld uitwerken:

$$3-\cfrac{7}{6+\cfrac{6}{12-\frac{3}{4}}} = 3-\cfrac{7}{6+\cfrac{6}{11\frac{1}{4}}} = 3-\cfrac{7}{6+\cfrac{6}{\frac{45}{4}}} = 3-\cfrac{7}{6+\cfrac{6}{\frac{6\times 4}{45}}} = 3-\cfrac{7}{6+\frac{8}{15}} =$$

$$= 3-\cfrac{7}{6\frac{8}{15}} = 3-\cfrac{7}{\frac{98}{15}} = 3-7\times\frac{15}{98} = 3-\frac{15}{14} = 3-1\frac{1}{14} = 1\frac{13}{14}.$$

Ter oefening maken de opgaven 88 t/m 91.
Oplossingen inzenden van de opgaven 92 t/m 98.

9,1. Tiendelige of decimale breuken

Tiendelige of decimale breuken zijn breuken die tot noemer hebben het getal 10 of een macht van 10. De breuken die geen macht van 10 tot noemer hebben, noemt men gewone breuken.

Zo zijn: $\frac{7}{10}$; $\frac{11}{100}$; $\frac{213}{1000}$ tiendelige breuken. 1n plaats van $\frac{7}{10}$ schrijft men ook wel 0,7 (spreek uit: ‘zeven tiende’). Zo ook 0,11 (elf honderdste), 0,213 enz. $\frac{3}{1000} = 0{,}003$ (spreek uit: ‘drie duizendste’).

Bekijken we het getal 0,003 eens nauwkeuriger. De eerste nul geeft aan dat er geen gehele eenheden zijn, de tiende delen zijn door een komma van de gehele gescheiden. De komma heet decimaalteken. Op de eerste plaats achter het decimaalteken schrijft men de tiende delen, op de tweede plaats de honderdste delen, op de derde plaats de duizendste delen, enz. In het getal 0,003 zijn er dus geen eenheden, geen tiende delen en geen honderdste delen, wel duizendste delen en wel drie duizendste delen. Een tiendelige breuk wordt vermenigvuldigd met 10, 100, 1000 enz., door het decimaalteken 1, 2, 3 enz. plaatsen naar rechts te verplaatsen.

Een tiendelige breuk wordt door 10, 100, 1000 enz. gedeeld door het decimaalteken 1, 2, 3 enz. plaatsen naar links te verplaatsen.

Zo is: $100 \times 3{,}5678 = 256{,}78$

en $5467{,}98 \div 1000 = 5{,}46798.$

De cijfers rechts van de komma of het decimaalteken heten decimalen. Een getal dat bestaat uit een aantal gehelen en een tiendelige breuk, wordt een decimaal getal genoemd.

De rekenkundige bewerkingen met de decimale getallen zijn hetzelfde als die met de gewone getallen, alleen moet men op de juiste plaats van de komma letten. Moet een aantal decimale getallen opgeteld worden, dan is het het eenvoudigst om de getallen onder elkaar te plaatsen en daarna op te tellen (plaats de komma’s nauwkeurig onder elkaar).

$$\begin{array}{r} 55{,}347 \\ 523{,}18 \\ 4{,}3 \\ \hline 582{,}827 \end{array} +$$

zo evenzeer met aftrekken:

$$\begin{array}{r} 87{,}234 \\ 15{,}317 \\ \hline 71{,}917 \end{array} -$$

9,2. Vermenigvuldigen en delen van decimale breuken

Men vermenigvuldigt een decimaal getal met een geheel getal door het decimale getal als geheel te beschouwen (dus zonder komma) en in het product het decimaalteken zoveel plaatsen links te zetten als er in het vermenigvuldigtal cijfers na de komma staan.

Twee decimale getallen worden met elkaar vermenigvuldigd alsof het gehele getallen zijn (dus zonder komma) en in het product wordt het decimaalteken zoveel plaatsen naar links gezet, als er in het vermenigvuldigtal en vermenigvuldiger <u>samen</u> cijfers na het decimaalteken staan.

<u>Voorbeelden:</u> $8 \times 2{,}34 = 18{,}72$

$5{,}3 \times 3{,}47 = 18{,}391$.

Een decimaal getal wordt door een geheel getal gedeeld door deeltal als een geheel getal te beschouwen en in het quotiënt het decimaalteken zoveel plaatsen naar links te plaatsen, als in het deeltal cijfers na het decimaalteken staan.

Is echter ook de deler een decimaal getal, dan maken we eerst gebruik van de eigenschap dat een quotiënt niet van waarde verandert, indien men teller en noemer met eenzelfde getal vermenigvuldigt.

Van deze stelling maken we gebruik om van de deler een geheel getal te maken, dus vermenigvuldigen we deler en deeltal met die macht van 10 als het aantal cijfers achter de komma van de deler bedraagt. We hebben dan het vorige getal weer terug.

Voorbeelden: $4{,}464 \div 3{,}72 = 446{,}4 \div 372 = 1{,}2$.
$25 \div 1{,}25 = 2500 \div 125 = 20$.

Dikwijls komt het voor dat een deling niet opgaat. We kunnen dan zoveel decimalen achter de komma uitrekenen als we nodig hebben.

9,3. Herleiden van gewone breuken tot decimale breuken

Als de noemer van een breuk uitsluitend de factoren 2 en 5 bevat is de breuk te herleiden tot een tiendelige breuk. Bevat de noemer van een breuk niet uitsluitend de factoren 2 en 5, dan is de breuk niet te herleiden tot een decimale breuk.

Deze laatste breuken kunnen we wel benaderen met decimale breuken tot op één tiende, één honderdste, één duizendste enz. nauwkeurig.

Zo is: $\frac{13}{28} = 0{,}4$ nauwkeurig tot op 0,1 .
$\frac{13}{28} = 0{,}46$ nauwkeurig tot op 0,01 .
$\frac{13}{28} = 0{,}464$ nauwkeurig tot op 0,001 .

Deze resten moeten natuurlijk alle kleiner zijn dan 28, zodat men op zijn hoogst 27 verschillende resten zal kunnen krijgen.

Zetten we de deling onbeperkt voort, dan zullen we dus op een gegeven moment een rest vinden die we daarvoor al gehad hebben. Vanaf deze rest zullen de resten weer in dezelfde volgorde terug komen. Het gevolg hiervan is dan, dat de cijfers van het quotiënt ook in dezelfde volgorde zullen terugkeren.

Een tiendelige breuk, waarbij vanaf een zekere decimaal de cijfers in dezelfde volgorde terugkeren, heet een repeterende breuk.

De groep terugkerende decimalen in een repeterende breuk noemen we de periode.
In de volgende les zullen we het gedrag van een repeterende breuk nader beschouwen.
Nu zullen we nog twee delingen aangeven die een repeterende periode hebben.

```
13 / 5,0 \ 0,385385385. . .        11 / 8,0 \ 0,72727272. . .
     39                                 77
     111   *[3]                          30
     104                                 22
       70                                 80
       65                                 77
        50                                 30
```

Bij de eerste deling is gerekend totdat het getal 5 weer terugkomt, waarna de gehele periode zich herhaalt. De periode. De periode is hier dus het getal 385.

Bij de tweede deling is de deling nog een eindje verder uitgevoerd, waaruit duidelijk te zien is dat de getallen zich herhalen. De getallen die we bedoelen zijn: 80, 30, 80, 30 enz. De periode van deze repeterende breuk is 72.

Bij een repeterende breuk zou het quotiënt een getal worden, bestaande uit een oneindig aantal cijfers, waarbij steeds dezelfde periode achter elkaar opgeschreven moet worden.
In de volgende les zullen we zien dat we dit korter kunnen opschrijven.

Ter oefening maken de opgaven 99 t/m 101.
Oplossingen inzenden van de opgaven 102 t/m 109.

[3] Blijkbaar om de gewenste periode te krijgen, haalt Rens in het voorbeeld het getal 1 aan inplaats van de 0. Dit is natuurlijk niet correct, maar het staat de uitleg niet in de weg,. (FV)

R.T.

Rekenkunde. Les 10 Nadruk verboden 22

10,1. Repeterende breuken

In de vorige les hebben we gezien dat, indien de cijfers vanaf een zekere decimaal steeds in dezelfde regelmaat terugkeren, een dusdanige breuk, een repeterende breuk wordt genoemd.

De repeterende breuk of liever de periode wordt aangeduid door een streepje te zetten door het eerste en het laatste getal van de periode.

Bevat de periode slechts één cijfer, dan zet men alleen door dat cijfer een streep.

Bijvoorbeeld:

$$8 \div 3 = 2{,}6666\ldots = 2{,}\cancel{6}$$

$$3{,}5678678678\ldots = 3{,}5\cancel{6}7\cancel{8}\,.$$

Begint de periode onmiddellijk na de komma bv: $3{,}\cancel{7}48\cancel{3}$, dan noemen we zo'n breuk een zuiver repeterende breuk, begint de periode niet onmiddellijk na het decimaalteken, dan heet de breuk een gemengd repeterende breuk bv: $0{,}58\cancel{6}\cancel{3}$.

Wordt een repeterende breuk vermenigvuldigd met een macht van tien, dan gaat de komma zoveel plaatsen naar rechts als de exponent van de macht van tien bedraagt.

Door zo'n vermenigvuldiging is het mogelijk dat de periode echter verandert.

$$10 \times 0{,}\cancel{3}7\cancel{5} = 3{,}\cancel{7}5\cancel{3}\,.$$

Het is mogelijk om een repeterende breuk te herleiden tot een gewone breuk, dus het omgekeerde van het voorgaande.

Stel, gegeven de repeterende breuk $0{,}\cancel{9}4\cancel{3}$. Om nu de gewone breuk te vinden, gaan we als volgt te werk.

$$\begin{array}{rcl} 1000 \times 0{,}\cancel{9}4\cancel{3} & = & 943{,}\cancel{9}4\cancel{3} \\ 1 \times 0.\cancel{9}4\cancel{3} & = & 0{,}\cancel{9}4\cancel{3} \; - \\ \hline 999 \times 0{,}\cancel{9}4\cancel{3} & = & 943 \end{array} \qquad \text{of } 0{,}\cancel{9}4\cancel{3} = \frac{943}{999}\,.$$

Indien de gevonden breuk nog te vereenvoudigen is, kunnen we dit verder rustig doen.

Nog een voorbeeld: $0{,}\cancel{3}74\cancel{5}$.

$$\begin{array}{rcl} 10.000 \times 0{,}\cancel{3}74\cancel{5} & = & 3745{,}\cancel{3}74\cancel{5} \\ 1 \times 0{,}\cancel{3}74\cancel{5} & = & 0{,}3745 \\ \hline 9999 \times 0{,}\cancel{3}74\cancel{5} & = & 3745 \end{array} \qquad \text{dus: } 0{,}\cancel{3}74\cancel{5} = \frac{3745}{9999}\,.$$

<u>In woorden</u>: Een zuiver repeterende breuk wordt herleid tot een gewone breuk door als teller de periode te nemen en als noemer zoveel negens, als het aantal cijfers waaruit de periode bestaat.

$$0{,}\cancel{2}7\cancel{3} = \frac{273}{999}\,; \qquad 0{,}\cancel{2}7345\cancel{9} = \frac{273459}{999999}\,.$$

Bij een gemengd repeterende breuk vermenigvuldigen we met een macht van tien, zodanig dat de komma achter de periode komt en daarna met een macht van tien zodanig, dat de komma vlak voor de periode komt te staan. Stel, we moeten $0{,}35\cancel{7}8\cancel{9}$ omwerken tot een gewone breuk, dan voeren we bovenstaande als volgt uit:

$$\begin{array}{rcl} 100.000 \times 0{,}35\cancel{7}8\cancel{9} & = & 35789{,}\cancel{7}8\cancel{9} \\ 100 \times 0{,}35\cancel{7}8\cancel{9} & = & 35{,}\cancel{7}8\cancel{9} \\ \hline 99\,900 \times 0{,}35\cancel{7}8\cancel{9} & = & 35789 - 35 \end{array}$$

Dus: $0{,}35\cancel{7}8\cancel{9} = \dfrac{35789 - 35}{99900} = \dfrac{35745}{99900}\,.$

<u>In woorden</u>: Een gemengd repeterende breuk wordt herleid tot een gewone breuk, waarvan de teller gelijk is aan het getal bestaande uit de niet-repeterende cijfers gevolgd door de periode verminderd met het getal, bestaande uit de niet-repeterende cijfers en waarvan de noemer bestaat uit zoveel negens als het aantal cijfers der periode bedraagt, gevolgd door zoveel nullen als het aantal cijfers bedraagt van het gedeelte dat niet repeteert.

$$0{,}8\cancel{4}5\cancel{6} = \frac{8456-8}{9990} = \frac{8448}{9990} = \frac{1408}{1665}\,.$$

$$0{,}75\cancel{2}\cancel{3} = \frac{7523-75}{9900} = \frac{7448}{9900} = \frac{1862}{2475}\,.$$

$$0{,}00\cancel{3}4\cancel{5} = \frac{345}{99900} = \frac{23}{6660}\,.$$

$$17{,}5\cancel{3}2\cancel{1} = 17\ \frac{5321-5}{9990} = 17\ \frac{5316}{9900} = 17\ \frac{886}{1665}\,.$$

<u>Enige uitgewerkte voorbeelden:</u>

<u>a.</u>

$$0{,}0\cancel{6} \times \frac{42}{55} \times \left(3{,}1\cancel{3} - \frac{35}{21}\right) - \frac{1}{-8}$$

$$= \frac{6}{90} \times \frac{42}{55} \times \left(3\,\frac{12}{90} - \frac{35}{21}\right) + \frac{1}{8} = \frac{14}{275} \times \left(3\,\frac{2}{15} - 1\,\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{8} = \frac{14}{25} - \frac{2}{15} + \frac{1}{8} = \frac{28}{375} + \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{599}{3000}}\,.$$

<u>b.</u>

$$= \frac{\left(5{,}8\cancel{3} \times 1{,}\cancel{6} + 8\frac{3}{4} - 10 \times 1.1\cancel{6}\right) \div 4{,}375}{2 - 0{,}3\cancel{9}} + \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{\left(5\frac{83-8}{90} \times 1\frac{6}{9} + 8\frac{3}{4} - 10 \times 1\frac{16-1}{90}\right) \div 4\frac{3}{8}}{2 - \frac{39-3}{90}} + \frac{1}{36} = \frac{\left(5\frac{5}{6} \times 1\frac{2}{3} + 8\frac{3}{4} - 10 \times 1\frac{1}{6}\right) \times \frac{8}{35}}{2 - \frac{2}{5}} = \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{\left(\frac{35}{6} \times \frac{5}{3} + 8\frac{3}{4} - 10 \times \frac{7}{6}\right) \times \frac{8}{35}}{1\frac{3}{5}} + \frac{1}{36} = \frac{\left(\frac{175}{18} + 8\frac{3}{4} - \frac{35}{3}\right) \times \frac{8}{35}}{\frac{8}{5}} + \frac{1}{36}$$

$$= \left\{\left(9\,\frac{13}{18} + 8\,\frac{3}{4} - 11\,\frac{2}{3}\right) \times \frac{8}{35} \times \frac{5}{8}\right\} + \frac{1}{36} = \left\{\left(9\,\frac{26}{36} + 8\,\frac{27}{36} - 11\,\frac{24}{36}\right) \times \frac{1}{7}\right\} + \frac{1}{36} =$$

$$= 6\frac{29}{36} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{36} = \frac{245}{36} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{36} = \frac{35}{36} + \frac{1}{36} = \mathbf{1}\,.$$

<u>c.</u>

$$\frac{13\frac{1}{3}}{6\frac{2}{13}} \times \frac{12\frac{1}{6}}{3\frac{1}{2} + \frac{27}{34}} \times \left(\frac{18\frac{3}{4}}{1\frac{1}{3}} - \frac{12}{5\frac{1}{3}}\right) + \frac{3\frac{3}{4}}{\frac{8}{19}} + 12 \div \frac{1}{12\frac{1}{2}} - 1\,\frac{27}{64} =$$

$$= \frac{40}{3} \times \frac{13}{80} \times \frac{\frac{73}{6}}{3\frac{17}{34} + \frac{27}{34}} \times \left(\frac{75}{4} \times \frac{3}{4} - 12 \times \frac{3}{6}\right) + \frac{15}{4} \times \frac{19}{8} + 12 \times 12\,\frac{1}{2} - 1\,\frac{27}{64} =$$

$$= \frac{13}{6} \times \frac{73}{6} \times \frac{34}{146} \times \left(\frac{225}{16} - \frac{36}{16}\right) + \frac{285}{32} + 12 \times \frac{25}{2} - 1\,\frac{27}{64} =$$

$$= \frac{13 \times 17}{6 \times 6} \times \frac{189}{16} + 8\,\frac{29}{32} + 150 - 1\,\frac{27}{64} = \frac{13 \times 17 \times 21}{2 \times 2 \times 16} + 8\,\frac{58}{64} + 150 - 1\,\frac{27}{64} =$$

$$= \frac{4641}{64} + 7\,\frac{31}{64} + 150 = 72\,\frac{33}{64} + 7\,\frac{31}{64} + 150 = 80 + 150 = \mathbf{230}.$$

Ter oefening maken de opgaven 110 t/m 114.
Oplossingen inzenden van de opgaven 115 t/m 122.

11,1. Negatieve exponenten

In les 1 hebben we bij de machten van tien reeds gezien dat indien we twee machten met hetzelfde grondtal op elkaar delen, er als uitkomst een macht komt met hetzelfde grondtal en met als exponent het verschil der exponenten der machten. Ook in les 4 is een en ander reeds bekeken.

De exponent geeft het aantal aanwezige factoren aan, zodat we hier eigenlijk geen teken aan toe kunnen kennen, we zouden dan bij een negatief teken als het ware een negatief aantal factoren hebben, hetgeen natuurlijk onzin is. De negatieve exponenten hebben dan ook een andere betekenis, zoals we uit het volgende zullen zien. Bepalen we een quotiënt van twee machten met hetzelfde grondtal, maar waarvan de exponent van de macht in de noemer groter is dan die van de teller, dan vinden we een negatieve exponent. bv: $4^5 \div 4^8 = 4^{5-8} = 4^{-3}$, doch ook $\frac{4^5}{4^8} = \frac{1}{4^3}$, dus: hieruit volgt dat: $4^{-3} = \frac{1}{4^3}$.

Hieruit blijkt dat we dus een macht uit de noemer naar de teller mogen brengen door het teken van de exponent tegengesteld te nemen.

Hetzelfde geldt indien we een macht van de noemer naar de teller willen overbrengen.
We kunnen dus schrijven:

$\frac{1}{2} = 2^{-1}$; $\frac{1}{3} = 3^{-1}$; $\frac{1}{2^5} = 2^{-5}$; $\frac{1}{2\times3} = 2^{-1} . 3^{-1}$ enz.

De uitdrukkingen met negatieve exponenten heten oneigenlijke machten.

De regels die we voor het vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen hebben geleerd, gelden onveranderd voor de negatieve exponenten.

Voorbeelden: $5^{-3} \times 5^{-2} = 5^{-5}$; $3^{-7} \times 3^4 = 3^{-3}$; $3^7 \times 3^{-4} = 3^3$; $2^{-8} \times 2^{-4} = 2^{-12}$; $2^{-8} \div 2^{-4} = 2^{-4}$; $2^{-8} \div 2^4 = 2^{-12}$; $2^8 \div 2^{-4} = 2^{12}$; $(2^{-3})^2 = 2^{-6}$; $(2^{-2})^3 = 2^{-6}$.

Wanneer nu twee machten met hetzelfde grondtal en ook met dezelfde exponent op elkaar gedeeld moeten worden, komt er een eigenaardig geval naar voren. Beschouwen we als voorbeeld $\frac{5^3}{5^3} = 1$, en passen we hierop de regel voor het delen van machten toe, dus aftrekken van de exponenten, dan vinden we: $5^{3-3} = 5^0 = 1$.

Dit geldt natuurlijk voor ieder getal. Algemeen kinnen we zeggen $a^0 = 1$.

In woorden: een getal tot de macht nul is gelijk aan één.

Bij zeer kleine decimale breuken wordt een dankbaar gebruik gemaakt van de negatieve exponenten. bv:

$$0{,}000005 = \frac{5}{1000000} = \frac{5}{10^6} = 5 \times 10^{-6}.$$

$$0{,}000\,000\,009 = \frac{9}{10^9} = 9 \times 10^{-9}.$$

Dit zijn dus zeer kleine getallen die tot nul naderen.

11,2. Het getal nul

Het moeilijkste getal in de wiskunde is zonder twijfel het getal nul. We dienen goed in het oog te houden dat het getal nul nooit rechtstreeks kan ontstaan uit een vermenigvuldiging of deling, indien het getal nul tenminste zelf, niet in de vermenigvuldiging of deling voorkomt. Slechts uit een aftrekking is het mogelijk dat het getal nul ontstaat.

We zullen nu eens verschillende rekenkundige bewerkingen beschouwen, waarin het getal nul voorkomt.

Ten eerste de vermenigvuldiging. Is de vermenigvuldiger of vermenigvuldigtal gelijk aan nul, dan is ook het product gelijk aan nul.

Veronderstel eens, dat we geen bezit hebben, dus we bezitten nul gulden.
Dan kunnen we gerust ons bezit bv. met 25 vermenigvuldigen zonder dat dit ons een cent oplevert.

Wordt de uitkomst van een product gelijk aan nul, dan is dit alleen mogelijk als één van de factoren gelijk aan nul is.

In de algebra wordt dit zeer dikwijls toegepast en dit is dan ook één van de meest belangrijke toepassingen van het getal nul.

Ten tweede de deling. Is het deeltal gelijk aan nul en moeten we dit door een bepaald getal delen, dan is het quotiënt gelijk aan nul. Veronderstel weer eens dat we geen geld bezitten, dus nul gulden hebben, dan kunnen we dit bedrag onder een aantal vrienden verdelen, die dus niets ontvangen zullen.

Veronderstellen we nu echter dat we wel een bepaald geldbedrag bezitten en dat onder niemand willen verdelen, dan kunnen we dit oneindig veel keren doen.

We zullen trachten dit laatste nog met een voorbeeld te verduidelijken.

$\frac{1}{1} = 1$; $\frac{1}{0{,}1} = 10$; $\frac{1}{0{,}01} = 100$; $\frac{1}{0{,}0001} = 10.000$; $\frac{1}{10^{-6}} = 10^6$; $\frac{1}{10^{-10}} = 10^{10}$.

Hieruit zien we, dat des te kleiner de noemer wordt, des te groter wordt het quotiënt.

Is de noemer oneindig klein, d.w.z. gelijk aan nul, dan is het quotiënt oneindig groot.
In de wiskunde wordt het getal oneindig aangegeven door het teken ∞.
We vinden dus: een getal gedeeld door nul is oneindig. Het getal nul als exponent hebben we reeds in (11,1) bekeken.

Wanneer we nu het quotiënt $\frac{0}{0}$ bekijken, dan zien we dat we twee dezelfde getallen op elkaar moeten delen. De uitkomst zou dan 1 zijn.

Doch we hebben geleerd nul gedeeld door een getal is nul en ook een getal gedeeld door nul is oneindig. We zouden hier dus met evenveel recht verscheidene antwoorden kunnen vinden. Ook kunnen we redeneren dat $\frac{0}{0}$ bv. gelijk aan 5 is, of welk getal dan ook, omdat $5 \times 0 = 0$ is. Zo'n vorm waar dus geen definitieve uitkomst te geven is, noemen we een <u>onbepaalde vorm</u>.

Er bestaan verschillende onbepaalde vormen, waarvan we er enkele zullen noemen.

$\frac{0}{0}$; $\frac{0}{\infty}$; $\frac{\infty}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; 0^0 ; 0^∞ ; ∞^0 ; ∞^∞ enz.

We vinden dus de volgende regels:

$a^0 = 1$
$\frac{0}{a} = 0$
$\frac{a}{0} = \infty$

Hierin stelt a een bepaald getal voor dat echter ongelijk aan nul en ongelijk aan oneindig moet zijn. Voor ongelijk gebruiken we in de wiskunde vaak het gelijkteken waardoor een streep wordt gezet, dus het teken $\neq$ betekent "ongelijk aan". We kunnen zeggen dat de omblokte formules algemeen gelden als: $a \neq 0$ en $a \neq \infty$.

Ter oefening maken de opgaven 123 t/m 126.
Oplossingen inzenden van de opgaven 127 t/m 133.

12,1. Worteltrekken

De wortel uit een getal is dat getal dat in het kwadraat gebracht het oorspronkelijke getal weer oplevert. In plaats van het kwadraat wordt ook wel het woord vierkant gebruikt, daarom wordt ook gezegd de vierkantsworteltrekking.

Omdat $5^2 = 25$ is, is de vierkantswortel uit 25 gelijk aan 5. Spreken we zonder nadere aanduiding over de worteltrekking, dan bedoelen we altijd de vierkantsworteltrekking (ook wel genoemd de 'tweede-machtswortel'.

Om de wortel uit een getal aan te geven, gebruiken we het teken $\sqrt{x}$, de horizontale streep moet over het gehele getal, waaruit de wortel getrokken moet worden, gezet. Indien een vorm erg groot is, wordt ook gebruik gemaakt van haakjes, bv: $\sqrt{(\ldots.)}$, dit wil dan zeggen, dat uit de gehele vorm tussen haakjes de wortel getrokken moet worden.

De worteltrekking kan het eenvoudigst uitgevoerd worden door het getal waaruit de wortel getrokken moet worden in factoren te ontbinden, bv: $\sqrt{567} = \sqrt{2^6.3^2} = 2^3.3$. Hieruit blijkt dat de exponent gehalveerd moet worden om de wortel te trekken. Het is ook mogelijk dat we uit een getal slechts gedeeltelijk een wortel kunnen trekken, bv :

$\sqrt{2^5.3^6.7^3} = \sqrt{2^4.2.3^6.7^2.7} = 2^2.3^3.7\sqrt{2.7}.$

Zoals het woord tweede-machtsworteltrekking al doet vermoeden, bestaat er ook derdemachts- vierde-machtsworteltrekking enz.

De derde-machtswortel uit een getal, is dat getal dat tot de derde macht gebracht, het oorspronkelijke getal weer oplevert. Deze definitie gaat dus zo door voor vierde-machts-, vijfde-machtswortels enz. We geven dit aan door in het wortelteken een drie, vier enz. te plaatsen. Eigenlijk behoort er in het wortelteken hiervóór gebruikt een twee te staan, doch deze wordt altijd weggelaten, dus: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$; $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[4]{a}$ enz.

<u>Voorbeeld:</u> $\sqrt[3]{3^6.5^9} = 3^2.5^3$; $\sqrt[7]{2^{14}.3^{23}} = 2^2.3^3\sqrt[7]{3^2}$.

Uit deze voorbeelden blijkt dat we de exponent van het getal onder de wortel delen door de wortel-exponent. De methode van worteltrekken hierboven toegepast, wordt zeer veel gebruikt.

Moeten we echter de wortel trekken uit een zeer groot getal, dan gaan we meestal anders te werk. Van deze methode zullen we eerst aan de hand van een voorbeeld het uitwerkschema aangeven en daarna in woorden een uitleg geven.

Wat is de wortel uit het getal 54756?

$$
\begin{array}{rl}
 & 5\,|47\,|56 \\
2 \times 2 = & \underline{4} \\
 & 147 \\
43 \times 3 = & \underline{129} \\
 & 1856 \\
464 \times 4 = & \underline{1856} \\
 & 0
\end{array}
$$

De wortel uit 54756 is dan 234.

<u>In woorden:</u> Verdeel het getal, waaruit de vierkantswortel getrokken moet worden van rechts af in groepen van 2 cijfers, aan te geven door de verticale streepjes. Van de eerste groep van links af zoekt men nu het kwadraat van een getal dat dit getal zo dicht mogelijk benadert, doch <u>kleiner</u> dan dit getal moet zijn. In bovengenoemd geval dus het getal 4 of zoals er voor aangegeven 2×2.

Het kwadraat wordt van de eerste groep afgetrokken en bij het verschil wordt de tweede groep gevoegd (er gewoon achter geplaatst). Nu tellen we de getallen van de vermenigvuldiging op, dus $2 + 2 = 4$ en plaatsen een punt achter dit getal, vermenigvuldigd met een getal waarvoor we weer een punt in de plaats zetten.

$$
\begin{array}{rl}
 & 5\,|\,47\,|\,56 \\
2 \times 2 = & \underline{4} \\
 & 147 \\
4\,.\times\,. = &
\end{array}
$$

Op de plaatsen der punten moeten we nu éénzelfde getal zien te vinden, zodanig dat de vermenigvuldiging zo dicht mogelijk het getal 147 benadert, doch niet groter dan 147 mag worden. We vinden dus het getal 3, omdat $43 \times 3 = 129$ het getal 147 het dichtst benadert. Dus we vinden:

$$
\begin{array}{rl}
 & 5\,|\,47\,|\,56 \\
2 \times 2 = & \underline{4} \\
 & 147 \\
43 \times 3 = & \underline{129} \\
 & 1856 \\
46\,.\times\,. = &
\end{array}
$$

Het getal 129 trekken we af van 147 en dit geeft het getal 18. We halen nu weer de volgende groep erbij en tellen de waarden 43 en 3 weer bij elkaar; dit geeft het getal 46.

Achter het getal 46 plaatsen we weer een punt maal een punt en zoeken weer een getal dat na vermenigvuldiging het getal 1856 zo dicht mogelijk benadert. We vinden het getal 4, aangezien $464 \times 4 = 1856$ is. Na aftrekking vinden we nu nul. Nieuwe groepen kunnen niet meer worden aangehaald, daar deze niet meer aanwezig zijn, zodat de worteltrekking is uitgevoerd.
De wortel uit het getal wordt dan gevormd door de rij getallen achter het $\times$-teken, dus het getal 234.

Bij de worteltrekking van decimale getallen vindt de indeling in groepen van twee plaats vanaf de komma, zowel naar links als naar rechts. Aangezien het mogelijk is dat rechts van de komma een oneven aantal cijfers voorkomt, mogen we altijd een nul bijvoegen om de groep van twee te vervolmaken zonder dat daardoor het getal verandert.

Het getal heeft dan echter geen wortel; we moeten dan de wortel benaderen op een gevraagd aantal decimalen nauwkeurig. De plaats van de komma wordt bepaald door de eerste groep, die na de komma wordt aangehaald; daarna wordt dus de komma geplaatst. <u>Voorbeelden:</u>

De wortel uit:

$$
\begin{array}{rr}
 & 5,\,|\,33\,|\,61 \\
2 \times 2 = & \underline{4} \\
 & 133 \\
43 \times 3 = & \underline{129} \\
 & 461 \\
461 \times 1 = & \underline{461} \\
 & 0
\end{array}
$$

Hieruit volgt dat $\sqrt{5{,}33611} = 2{,}31$.

Bepaal op 2 decimalen nauwkeurig de wortel uit 234,1 .

$$
\begin{array}{rr}
 & 2\,|\,34,\,|\,10\,|\,00 \\
1 \times 1 = & \underline{1} \\
 & 134 \\
25 \times 5 = & \underline{125} \\
 & 910 \\
303 \times 3 = & \underline{909} \\
 & 100 \\
3060 \times 0 = & \underline{0} \\
 & 10000 \\
30600 \times 0 = &
\end{array}
$$

De wortel uit 234,1 is 15,30 .

De nul moet aangegeven worden om aan te geven dat het antwoord in twee decimalen nauwkeurig is.

Ter oefening maken de opgaven 134 t/m 136.
Oplossingen inzenden van de opgaven 137 t/m 141.

13.1. Herleiden van wortelvormen

De wortel uit een getal dat geen volkomen kwadraat is, noemen we een onmeetbaar of irrationeel getal. Een irrationeel getal is een getal dat niet te schrijven is met een eindig aantal cijfers achter de komma. In les 12 hebben we reeds gezien dat we dan de wortel kunnen trekken tot aan een bepaald aantal aangegeven decimalen.

Het is echter ook mogelijk om gedeeltelijk de wortel te trekken en de rest onder het wortelteken te laten staan, bv: $\sqrt{20} = \sqrt{2^2.5} = 2\sqrt{5}$; $\sqrt{108} = \sqrt{2^2.3^3} = 2.3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Omgekeerd kunnen we getallen, die voor het wortelteken staan, onder de wortel brengen, waarbij we het getal dan tot die macht moeten verheffen die de wortelexponent aangeeft, bv:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^3.3} = \sqrt{12}$$
$$5.3\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5^3.3^3.7}$$
$$3^2.2^3.5\sqrt{3.2.7} = \sqrt{3^4.2^6.5^2.3.2.7} = \sqrt{3^5.2^7.5^7.7}\ .$$

Is het getal onder het wortelteken een breuk, dan maken we gebruik van de volgende stelling: De wortel uit een breuk is de wortel uit de teller gedeeld door de wortel uit de noemer, dus:

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}\ ; \qquad \sqrt{\frac{80}{81}} = \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{81}} = \frac{4\sqrt{5}}{9} = \frac{4}{9}\sqrt{5}\ .$$

In de voorbeelden zijn de noemers alle volkomen kwadraten. Moeten we nu echter de wortel trekken uit een breuk waarvan de noemer geen volkomen kwadraat is, dan gaan we teller en noemer van de breuk met een getal vermenigvuldigen zodat de noemer wel een volkomen kwadraat wordt, bv:

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\ ; \qquad \sqrt{\frac{27}{28}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{21}{49}} = \frac{3}{14}\sqrt{21}\ .$$

In de wiskunde gelden nl. de afspraken:
1e. Onder een wortelvorm mag geen breuk staan, deze moet altijd omgewerkt worden.
2e. In de noemer van een breuk mag geen wortelvorm voorkomen.

Wanneer een getal met een wortelvorm vermenigvuldigd moet worden, kunnen we hier vrij weinig aan vermenigvuldigen, bv: $7 \times \sqrt{5} = 7\sqrt{5}$.

Vermenigvuldigen we echter twee wortelvormen met elkaar, die dezelfde wortelexponent bezitten, dan mogen we deze vormen onder één wortelteken samentrekken, dus: $\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{35}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{2.3.5} = \sqrt{30}$. Indien nu een wortelvorm met zichzelf vermenigvuldigd moet worden, dan kunnen we de vorm als volgt vereenvoudigen:

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{5^2} = 5\ ; \qquad \sqrt{7} \times \sqrt{7} = \sqrt{7^2} = 7. \qquad \text{Algemeen: } \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a\ .$$

Van deze eigenschap maken we gebruik om wortelvormen uit de noemer van een breuk te verdrijven.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2 \times \sqrt{6}}{6} = \frac{2}{6}\sqrt{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}\ .$$

Moeilijker worden de opgaven, indien de wortelexponent een ander getal dan 2 is. We moeten dan teller en noemer met een zodanige wortelvorm vermenigvuldigen dat we toch de wortel uit de noemer verdwijnt.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2^2}\ .$$

$$\frac{15}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{15 \quad \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}} = \frac{15 \quad \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{15 \quad \sqrt[3]{3^2}}{3} = 5\sqrt[3]{3^2}\ .$$

Bij de optelling en aftrekking van wortelvormen kunnen alleen de gelijksoortige wortels worden opgeteld of afgetrokken.

$$3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\ ; \quad 12\sqrt{5} - 9\sqrt{5} = 3\sqrt{5}\ .$$

Vormen als $2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$ kunnen niet rechtstreeks bij elkaar genomen worden, dan moeten de wortels eerst tot een gevraagd aantal decimalen nauwkeurig worden uitgerekend en daarna kan pas de bewerking van het aftrekken worden uitgevoerd. Benaderd tot op 3 decimalen geeft de vorm $2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$ tot uitkomst:

$$2 \times 1{,}732 - 3 \times 2{,}236 = 3{,}464 - 6{,}708 = 3{,}244\ .$$

We kunnen nu over de bewerkingen met wortelvormen het volgende overzicht geven:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}\ .$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}}{b} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{\frac{c}{d}} = \sqrt{\frac{a \times c}{b \times d}} = \frac{1}{bd}\sqrt{abcd}.$$

<u>Enkele uitgewerkte opgaven:</u>

<u>a.</u>

vereenvoudig: $$2\frac{2}{3} \times \frac{\frac{1}{4}\sqrt{1\frac{7}{9}}}{\frac{4}{5}\sqrt{6}} = \frac{8}{3} \times \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16}{9}} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{6}\sqrt{6} = \mathbf{\frac{5}{27}\sqrt{6}\ .}$$

<u>b.</u> $\{(7 + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - 8) + (4 - 2\sqrt{3})(2 + 5\sqrt{3}) - 5(2 - 3\sqrt{3})(4 - 6\sqrt{3})\} \times$
$\times (\sqrt{3} + 1) + 15\sqrt{3} + 1\ .$

Eerst rekenen we de producten der tweetermen uit:

$$\begin{array}{r} 7 \;\; + 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \;\; - 8 \\ \hline 7\sqrt{6} + 6 \\ -16\sqrt{3} - 56 \\ \hline -\; 9\sqrt{3} - 50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 - 2\sqrt{3} \\ 2 + 5\sqrt{3} \\ \hline 8 - \;\; 4\sqrt{3} \\ -\,30 + 20\sqrt{3} \\ \hline -\,22 \;\; + 16\sqrt{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \;\; - 3\sqrt{3} \\ 4 \;\; + 6\sqrt{3} \\ \hline 8 - 12\sqrt{3} \\ -\,54 + 12\sqrt{3} \\ \hline -\,46 \end{array}$$

Ingevuld geeft dit:

$$\{(-9\sqrt{3} - 50) + (-22 + 16\sqrt{3}) - 5(-46)\} \times (\sqrt{3} + 1) + 15\sqrt{3} + 1 =$$
$$= (-9\sqrt{3} - 50 - 22 + 16\sqrt{3} + 230) \times (\sqrt{3} + 1) + 15\sqrt{3} + 1 =$$
$$= (158 + 7\sqrt{3})(\sqrt{3} + 1) + 15\sqrt{3} + 1 =$$

$$\begin{array}{r} 158 + 7\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \;\; + 1 \\ \hline 158\sqrt{3} + 21 \\ 7\sqrt{3} + 158 \\ \hline 165\sqrt{3} + 179 \end{array}$$

, dus: $165\sqrt{3} + 179 + 15\sqrt{3} + 1 = 180\sqrt{3} + 180 = \mathbf{180(\sqrt{3} + 1)}$.

Ter oefening maken de opgaven 142 t/m 146.
Oplossingen inzenden van de opgaven 147 t/m 153.

14,1. Rationaal maken van de noemers van breuken

Indien in de noemer van een breuk een wortelvorm voorkomt, moet deze wortel weggewerkt worden, anders gezegd, de noemer moet rationaal gemaakt worden.

In de vorige les hebben we daarvan reeds een en ander behandeld. Moeilijker wordt echter het geval, als in de noemer som of verschil van wortels voorkomt.
In de algebra leren we verschillende zogenaamde ‘merkwaardige producten’. Een ervan zullen we ook in de rekenkunde bekijken, nl: het product $(a+b)(a-b)$.

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a-b} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad\; -ab-b^2} \\ a^2 \qquad\;\; -b^2 \end{array}$$

Uit bovenstaande vermenigvuldiging blijkt dus dat:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Of met wortelvormen geschreven: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b.$
We hebben hier dus een methode om van een tweeterm de wortels kwijt te raken.

Moeten we bv. de noemer van de breuk $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ rationaal maken, dan gaan we teller en noemer vermenigvuldigen met de vorm: $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, dus:

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}=\tfrac{2}{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})\,.$$

Andere voorbeelden (enige tussenbewerkingen zijn nu weggelaten):

a. $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{3(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3}=\tfrac{3}{4}(\sqrt{7}+\sqrt{3}).$

b. $\frac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}(2+\sqrt{3})}{4-3}=\sqrt{5}(2+\sqrt{3})=2\sqrt{5}+\sqrt{15}.$

c. $\frac{12}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{12(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}=\frac{12(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{18-12}=2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\,.$

d. $\frac{2\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{(2\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{7-\sqrt{5}}{9-5}=\frac{7-\sqrt{5}}{4}=\tfrac{1}{4}(7-\sqrt{5})\,.$

14,2. Imaginaire getallen

Bij het vermenigvuldigen, dus ook bij het kwadrateren geldt dat een product van twee negatieve getallen een positief getal als uitkomst geeft. Hieruit volgt dat $(-2)^2$ en $(+2)^2$ dezelfde uitkomst geeft. Omgekeerd zal dus bij de worteltrekking zowel de positieve als de negatieve waarde van het gevonden getal goed zijn, dus eigenlijk horen we te zeggen dat $\sqrt{4}$ gelijk is aan $+2$ of -2, aangezien zowel $+2$ in het kwadraat als -2 in het kwadraat het getal 4 oplevert. In de algebra houden we wel degelijk rekening met deze twee oplossingen; in de rekenkunde echter beschouwen we alleen de positieve oplossing.

Het is echter niet mogelijk om bij het kwadrateren een uitkomst te verkrijgen die negatief is. Dit houdt tevens in dat de wortel uit een negatief getal niet bestaanbaar is, dus $\sqrt{4}$ is onbestaanbaar of zoals we zeggen imaginair.

Voor de wortels uit negatieve getallen, die dus niet te trekken zijn, gaan we een bepaalde voorstellingswijze aangeven. We stellen nl. $\sqrt{-1}=i$ of zoals in de techniek meestal gedaan wordt j (denk er dus om in de wiskunde de letter i; in de techniek de letter j). De letter i is nl. in de techniek reeds gebruikt om er de stroomsterkte mee aan te duiden.

De rekenwijze met imaginaire getallen wordt in alle elektrotechnische vakken gebruikt en is dan ook uitermate belangrijk. Daar we met het symbool i of j werken voor de betekenis $\sqrt{-1}$, wordt deze rekenwijze ook wel de symbolische rekenwijze genoemd.

Bestaat een getal uit een imaginair getal en een reëel getal, verbonden door een plus- of minteken, dan noemen we zo'n getal een complex getal. bv: $3-4i$; $-7+5i$; $3+6i$ enz.

Indien we nu nogmaals de vorm $\sqrt{-4}$ bekijken, kunnen we daar dus voor schrijven:
$\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2\sqrt{-1}=2i$. Evenals: $\sqrt{-9}=3i$; $\sqrt{-25}=5i$; $\sqrt{-12}=2\sqrt{3i}$.
Daar dus: $\sqrt{-1}=i$, is $i^2=-1$; $i^3=i^2.i=-i$; $i^4=(i^2)^2=(-i)^2=1$; $i^5=i^4.i=i$; $i^6=i^4.i^2=-1$ enz.
We zien hieruit dat $i^4=1$ is, dus alle machten van i^4 zijn eveneens gelijk aan 1.

Hiervan maken we gebruik om machten van i met een exponent groter dan 4 te vereenvoudigen, $i^{47}=i^{44}.i^3=(i^4)^{11}.i^3=-i$.

Ga dus steeds uit van de volgende bewerkingen. Willen we een macht van i vereenvoudigen, dan halen we er zoveel machten van vier af als mogelijk is, er blijft dus slechts een vorm over, die gelijk is aan i, i^2 of i^3.
Leer daarom uit het hoofd:

$i=\sqrt{-1}$.
$i^2=-1$.
$i^3=-i=-\sqrt{-1}$.
$i^4=+1$

14,3. Complexe getallen

De algemene voorstelling van een complex getal is $a+bi$.
Twee complexe getallen, die hetzelfde reële deel hebben en hetzelfde imaginaire deel, doch waarvan het teken van het imaginaire deel tegengesteld is, noemen we twee toegevoegd complexe getallen, bv: $a+bi$ en $a-bi$; $2+3i$ en $2-3i$ enz. Indien we twee toegevoegd complexe getallen bij elkaar optellen is de uitkomst reëel:

$$3+4i+3-4i=6\,.$$

Indien we twee toegevoegd complexe getallen van elkaar aftrekken, is de uitkomst imaginair.

$$5+6i-(5-6i)=5+6i-5+6i=12i\,.$$

Beschouwen we nu eens het product:
$(a+bi)(a-bi)=(a)^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2$, doch $i^2=-1$ dus is:
$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$.

Van deze regel maken we weer gebruik om de noemer van een breuk rationaal te maken.

$$\frac{1}{3-4i}=\frac{1}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{3+4i}{9+16}=\frac{1}{25}(3+4i)\,.$$

$$\frac{2+3i}{4+3i}=\frac{(2-3i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{8-6i+12i-9i^2}{16+9}=\frac{8-6i+12i+9}{25}=\frac{17+6i}{25}\,.$$

$$\frac{2-5i}{5-6i}=\frac{2-5i}{5-6i}\cdot\frac{5+6i}{5+6i}=\frac{(2-5i)(5+6i)}{25-36i^2}=\frac{10+12i-25i-30i^2}{25+36}=\frac{10+12i-25i+30}{61}=\frac{40-13i}{61}\,.$$

$$\frac{3+2i}{5i}=\frac{(3+2i)i}{-5}=\frac{3i+2i^2}{-5}=\frac{1}{5}(3i-2)=\frac{1}{5}(2-3i)\,.$$

Ter oefening maken de opgaven 154 t/m 158.
Oplossingen inzenden van de opgaven 159 t/m 167.

15,1. Vervolg van de complexe getallen

Voor de complexe getallen gelden over het algemeen dezelfde rekenregels als bij de reële getallen. We hebben dus gezien dat $\sqrt{-1} = i$ is genaamd. Daar echter een vierkantswortel zowel positief als negatief kan zijn, zouden dus aan het getal i twee betekenissen toegekend kunnen worden.

Daarom definiëren we, dat i alleen maar $+\sqrt{-1}$ is. We noemen nu i de imaginaire eenheid en de getallen $ai,\ bi,\ 3i,\ -7i$ enz. de imaginaire getallen.

We moeten er goed op letten dat bij een complex getal bv: $a + bi$ er twee getalwaarden naast elkaar staan, met verschillende eenheid, die dus nooit bij elkaar opgeteld kunnen worden.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c)(b + d)i.$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c)(b - d)i.$$

Indien we twee complexe getallen bij elkaar optellen, ontstaat er een nieuw complex getal, waarvan het reële deel gelijk is aan de som der reële delen en het imaginaire deel gelijk is aan de som der imaginaire delen der afzonderlijke complexe getallen.

Indien we twee complexe getallen van elkaar aftrekken, ontstaat er een nieuw complex getal, waarvan het reële deel gelijk is aan het verschil der reële delen en het imaginaire deel gelijk is aan het verschil der imaginaire delen der afzonderlijke complexe getallen.

Wordt een complex getal met een reëel getal vermenigvuldigd, dan wordt zowel het reële als het imaginaire deel met dat getal vermenigvuldigd: $5(3 - 4i) = 15 - 20i.$

Wordt een complex getal gedeeld door een reëel getal, dan worden het reële en het imaginaire getal door dat getal gedeeld, dus:

$$\frac{8 + 12i}{4} = 2 + 3i\ . \qquad \frac{7 - 11i}{5} = \frac{7}{5} - \frac{11}{5}\,\mathrm{i}\ .$$

Bij het vermenigvuldigen van twee complexe getallen moeten we er op letten dat $i^2 = -1$ is, dus:

$$\begin{array}{l}
a + bi \\
\underline{c + di} \\
ac + bci \\
\underline{\qquad +adi + bdi^2} \\
ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i\ .
\end{array}$$

Evenals bij de reële getallen gelden bij de imaginaire getallen de afspraken betreffende de negatieve getallen, dus:

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1\ ; \qquad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{i^2 i} = \frac{1}{-i} = -\frac{1}{i}\ .$$

Aangezien we nooit wortelvormen in de noemer van een breuk laten staan en aangezien $i = \sqrt{-1}$ is, moet de vorm $-\frac{1}{i}$ dus nog herleid worden. We vermenigvuldigen dan teller en noemer met i en vinden dan: $-\frac{i}{i^2} = -\frac{i}{-1} = +i.$

Wordt een complex getal of een reëel getal door een complex getal gedeeld, dan vermenigvuldigen we teller en noemer met het toegevoegd complexe getal van de noemer. De noemer wordt dan reëel. De teller bestaat nu uit het product van een reëel getal en een complex getal, of uit het product van twee complexe getallen.

In de vorige les zijn hiervan reeds enige voorbeelden uitgewerkt en ook vraagstukken opgegeven.

Aangezien deze rekenwijze met complexe getallen in de techniek uitermate belangrijk is, zullen we nog enige voorbeelden geheel uitwerken en nemen hiervoor als eerste voorbeeld het vraagstuk 166b:

$$\frac{(6 - \sqrt{i})\,(6 + \sqrt{i})}{\sqrt{i} - i^2} = \frac{36 - 1}{\sqrt{i} - (-1)} = \frac{36 - 1}{\sqrt{i} + 1}\ .$$

Vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{i}-1$, dan vinden we:

$$\frac{(36-i)(\sqrt{i}-1)}{(\sqrt{i}+1)(\sqrt{i}-1)}=\frac{36\sqrt{i}-36-i\sqrt{i}+i}{i-1}.$$

Vermenigvuldig nu teller en noemer met $i+1$:

$$\frac{(36\sqrt{i}-36-i\sqrt{i}+i)(i+1)}{(i-1)(i+1)}=\frac{36i\sqrt{i}-36i-i^2\sqrt{i}+i^2+36\sqrt{i}-36-i\sqrt{i}+i}{i^2-1}=$$

$$=\frac{36i\sqrt{i}-36i+\sqrt{i}-1+36\sqrt{i}-36-i\sqrt{i}+i}{-1-1}=\frac{35i\sqrt{i}-35i+37\sqrt{i}-37}{-2}=$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(35i+37-35i\sqrt{i}-37\sqrt{i}\right).}$$

<u>Vraagstuk 158b:</u>

$$3+2i-\frac{7-2i}{i+1}+\frac{13(6-5i)(2+7i)}{(3+2i)(2+3i)}-\frac{(2+3i)(5-5i)}{2+4i}=$$

$$=3+2i-\frac{(7-2i)(i-1)}{(i+1)(i-1)}+\frac{13(12+42i-10i+35)}{6+9i+4i-6}-\frac{10-10i+15i+15}{2+4i}=$$

$$=3+2i-\frac{7i-7+2+2i}{-2}+\frac{13(47+32i)}{13i}-\frac{25+5i}{2+4i}=$$

$$=3+2i+\frac{1}{2}(9i-5)+\frac{47+32i}{i}-\frac{(25+5i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=$$

$$=3+2i+4\frac{1}{2}i-2\frac{1}{2}+\frac{(47+32i)i}{-1}-\frac{50+10i-100i+20}{20}$$

$$=\frac{1}{2}+6\frac{1}{2}i-47i+32-\frac{70-90i}{20}=\frac{1}{2}+6\frac{1}{2}i-47i+32-3\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}i=\boldsymbol{29-36i.}$$

$$\frac{3-5i}{2+i}-\frac{(4+3i)^2}{4-2i}-\left(\frac{6+5i}{4-3i}\right)^2=\frac{(3-5i)(2-i)}{4+i}-\frac{(4+3i)^2(4+2i)}{16+4}-$$

$$-\frac{36+60i-25}{16-24i-9}=\frac{6-3i-10i-5}{5}-\frac{16+8i+12i-6}{20}-\frac{11+60i}{7-24i}=$$

$$=\frac{1-13}{5}-\frac{10+20i}{20}-\frac{(11+60i)(7+24i)}{49+576}=\frac{2-26i-5-10i}{10}-$$

$$-\frac{77+264i+420i-1440}{625}=\frac{-3-36i}{10}-\frac{684i-1363}{625}=$$

$$=\frac{-375-4500i-1368i+2726}{1250}=\boldsymbol{\frac{2351-5868}{1250}}.$$

Ter oefening maken de opgaven 168 t/m 172.
Oplossingen inzenden van de opgaven 173 t/m 180.

16,1. Verhoudingen

Vergelijken we een lijn van 25 m. lengte met een lijn met een lengte van 5 m, dan is de tweede lijn 5 maal zo klein als de eerste. We hadden beide lijnen ook met een lijnlengte van 1 m. kunnen vergelijken, dan is de eerste lijn 25 maal op de lengte van 1 m. begrepen en de tweede 5 maal.

We vinden hier dus betrekkingen tussen de onderlinge lengten van de lijnen.
Deze betrekkingen heten verhoudingen en worden geschreven als:
$25 : 5$; $25 : 1$; $5 : 1$. (het **:**-teken spreken we hier uit als: “staat tot”, dus: 25 staat tot 5 enz.)

Bekijken we de verhouding $a : b$ dan zijn a en b de termen van de verhouding; a heet de eerste of voorgaande term, b de tweede of volgende term van de verhouding. Het quotiënt van de termen der verhoudingen heet het verhoudingsgetal.

We kunnen nu zeggen dat twee verhoudingen gelijk zijn als hun verhoudingsgetal gelijk is, dus: $25 : 5$ en $5 : 1$ hebben hetzelfde verhoudingsgetal nl: 5, waaruit volgt: $25 : 5 = 5 : 1$.
Wanneer we van een verhouding de termen met eenzelfde getal vermenigvuldigen of door eenzelfde getal delen, verandert de verhouding niet van waarde. Om dit aan te tonen, beschouwen we de verhouding $a : b$, die te schrijven is als: $\frac{a}{b}$.

Nu mogen teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigd, of door hetzelfde getal gedeeld worden, zodat het verhoudingsgetal hetzelfde blijft. Hiervan maken we gebruik om een verhouding zo eenvoudig mogelijk te schrijven bv: zonder breuken.
Nemen we als voorbeeld de verhouding:

$$3\tfrac{1}{8} : 2\tfrac{4}{5} = \frac{25}{8} : \frac{14}{5} = \frac{125}{40} : \frac{112}{40} = 125 : 112.$$

Indien we slechts één van de termen met een getal vermenigvuldigen, verandert het verhoudingsgetal. Vermenigvuldigen we de eerste term met een getal p, dan wordt ook het verhoudingsgetal p maal zo groot. Wordt de tweede term met een getal p vermenigvuldigd, dan wordt het verhoudingsgetal p maal zo klein. Wordt de eerste term door een getal p gedeeld, dan wordt het verhoudingsgetal p maal zo klein. Delen we de tweede term door het getal p, dan wordt het verhoudingsgetal p maal zo groot.

Hebben twee gelijke verhoudingen dezelfde eerste term, dan is ook hun tweede term gelijk, Eveneens geldt natuurlijk, dat indien van twee gelijke verhoudingen de tweede term gelijk is, de eerste term ook gelijk is.

16,2. Evenredigheden

Twee gelijke verhoudingen verbonden door het gelijkteken vormen een evenredigheid.

$$2 : 4 = 8 : 16\,.$$

Om de eigenschappen algemener aan te geven, zullen we ons in het volgende bedienen van letters in plaats van cijfers. Een evenredigheid stellen we dan voor door:

$$a : b = c : d\,.$$

a is de eerste term, b de tweede, c de derde en d de vierde term van de evenredigheid.

a en c noemen we ook wel de voorgaande termen van de evenredigheid; c en d de volgende termen. Ook zegt men wel, dat b en c de middelste termen en a en d, de uiterste termen van de evenredigheid zijn.

In de evenredigheid $a : b = b : c$ zijn de middelste termen gelijk.
We noemen dan b de middelevenredige tussen a en c.

Uit de eigenschappen van de verhoudingen volgen onmiddellijk de volgende eigenschappen voor de evenredigheden.

R.T.

35 Rk   Nadruk verboden

a. In een evenredigheid mag men de voorgaande termen met eenzelfde getal vermenigvuldigen of door eenzelfde getal delen.
b. In een evenredigheid mag men de volgende termen met eenzelfde getal vermenigvuldigen of door eenzelfde getal delen.
c. In een evenredigheid mag men de termen van de eerste verhouding en ook de termen van de tweede verhouding met eenzelfde getal vermenigvuldigen of door eenzelfde getal delen
d. In een evenredigheid mag men een uiterste term met een getal vermenigvuldigen, mits men de andere uiterste term door hetzelfde getal deelt.
e. In een evenredigheid mag men een middelste term met een getal vermenigvuldigen, mits men de andere middelste term door hetzelfde getal deelt.

Uit $a : b = c : d$ volgen dus de volgende evenredigheden:

a. $ma : b = mc : d$.

$\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$.

b. $a : mb = c : md$.

$a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$.

c. $ma : mb = nc : nd$.

$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$.

d. $ma : b = c : \frac{d}{m}$.

e. $a : mb = \frac{c}{m} : d$.

Van de eigenschappen der evenredigheden maken we gebruik om de termen van een evenredigheid met de kleinst mogelijke gehele getallen te schrijven.

Hoofdeigenschap: In een evenredigheid is het product van de uiterste termen gelijk aan het product van de middelste termen.

Bewijs: $a : b = c : d$ of: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Vermenigvuldigen we deze gelijkheid met het product van de noemers, dan zijn de uitkomsten weer gelijk, dus: $bd \times \frac{a}{b} = bd \times \frac{c}{d}$ of $ad = bc$.

Van de hoofdeigenschap maken we gebruik om van een evenredigheid, waarvan drie termen bekend zijn, de onbekende term te vinden.

Voorbeelden: $3 : 8 = 6 : x$. $3x = 48$ $x = \mathbf{16.}$

$(x - 3) : (x + 2) = (x + 5) : (x - 1)$.
$(x - 3)(x - 1) = (x + 2)(x + 5)$
$x^2 - 4x + 3 = x^2 + 7x + 10$
$-4x + 3 = 7x + 10$
$-4x - 7x = -3 + 10$
$-11x = 7 \quad x = \mathbf{\frac{7}{11}}$

Ter oefening maken de opgaven 181 t/m 190.
Oplossingen inzenden van de opgaven 184 t/m 190.

17,1. Vervolg van de evenredigheden

Als twee producten van twee factoren gelijk zijn, is het mogelijk daaruit een evenredigheid op te schrijven, waarvan de factoren van het ene product de uiterste- en die van het andere product de middelste termen zijn.

Dit is het omgekeerde van de hoofdeigenschap, dus: $ab = cd$, waaruit volgt:

$$a : c = d : b \quad \text{of} \quad a : d = c : b.$$

(men kan de juistheid van de evenredigheid altijd controleren door te onderzoeken of nog steeds geldt dat het product der middelste termen gelijk is aan het product der uiterste,)
En wel:

$$a : c = d : b \quad \text{en} \quad a : d = c : b.$$

Hieruit volgt: In een evenredigheid mag men de middelste termen verwisselen.

We hadden ook uit $ab = cd$ de volgende evenredigheden kunnen opschrijven:

$$c : b = a : d \quad \text{en} \quad d : b = a : c.$$

Waaruit volgt dat men eveneens de uiterste termen van een evenredigheid van plaats mag verwisselen. Uit deze evenredigheden kunnen we nog de volgende eigenschap afleiden.

In een evenredigheid mag men de uiterste termen tot middelste- en de middelste- tot uiterste termen maken.

Met behulp van de genoemde eigenschappen kunnen we uit het product $ab = cd$ acht evenredigheden opschrijven nl:

$$\begin{array}{ll} a : c = d : b\,; & c : a = b : d\,; \\ a : d = c : b\,; & c : b = a : d\,; \\ b : c = d : a\,; & d : a = b : c\,; \\ b : a = c : d\,; & d : b = a : c\,. \end{array}$$

17,2. Eigenschappen, die betrekking hebben op sommen en verschillen van termen

We gaan uit van de evenredigheid: $a : b = c : d$.

We tellen bij de eerste term van de verhouding $a : b$ de tweede term op, dus: $(a + b) : b$.
Het verhoudingsgetal van de nieuwe verhouding is dan:

$\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a}{b} + 1$, dus één meer dan de verhouding $\frac{a}{b}$.

Zo is ook $(c + d) + 1 = \frac{c+d}{d} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d} = \frac{c}{d} + 1$, één meer dan de verhouding $\frac{c}{d}$.

Daar het verhoudingsgetal $\frac{a}{b}$ gelijk is aan het verhoudingsgetal $\frac{c}{d}$ is $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, dus van $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ of $(a + b) : b = (c + d) : d$.

Verwisselen we van deze evenredigheid de middelste termen, dan vinden we:
$(a + b) : (c + d) = b : d \ (= a : c)$. We definiëren hetgeen gevonden is als volgt:

In een evenredigheid staat de som van de termen van de eerste verhouding tot de som van de termen der tweede verhouding, als de eerste term tot de derde, of de tweede tot de vierde.

Zo geldt ook de volgende eigenschap:

Het verschil van de termen van de eerste verhouding staat tot het verschil van de termen van de tweede verhouding, als de eerste term tot de derde, of de tweede tot de vierde.

Dus uit $a : b = c : d\ volgt$:

$$(a - b) : (c - d) = a : c = b : d\ .$$

Deze twee eigenschappen zijn ook te combineren, want uit $a : b - c : d$ volgt:

$(a + b) : (c + d) = a : c$

en: $(a - b) : (c - d) = a : c$

dus: $(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d)\ .$

In woorden: De som van de termen van de eerste verhouding staat tot de som van de termen van de tweede verhouding, als het verschil van de termen van de eerste verhouding tot het verschil van de termen van de tweede verhouding.

<u>Voorbeeld:</u> Twee getallen verhouden zich als $2 : 5$, terwijl hun som 84 bedraagt. Welke zijn deze twee getallen? Noemen we de getallen x en y, dan geldt:

$x : y = 2 : 5$

Verder is dan: $(x + y) : (2 + 5) = x : 2$ of:

$84 : 7 = x : 2$. Toepassen van de hoofdeigenschap geeft dan:

$7x = 168$ en $x = \frac{168}{7} = \mathbf{24}$

en daar $x + y = 84$ is, is $24 + y = 84$ of $y = \mathbf{60}$.

<u>Voorbeeld:</u> Van twee getallen is het verschil 5, terwijl zij zich verhouden als $7 : 5$. Bereken die getallen.

<u>Oplossing:</u> Stel de getallen x en y, dan is:

$x : y = 7 : 5$

of: $(x - y) : (7 - 5) = x : 7$

$5 : 2 = x : 7$.

$2x = 35$, dus: $x = \mathbf{17½}$

$x - y = 5$ of $17½ - y = 5$, dus: $y = \mathbf{12½}$.

<u>Voorbeeld:</u> Gegeven: $a : b = c : d$.

Leid hieruit af dat: $(2a + 3b) : (2c + 3d) = b : d$.

<u>Oplossing:</u> $a : b = c : d$ of $2a : 3b = 2c : 3d$.

$(2a + 3b) : (2c : 3d) = 3b : 3d$.

Dus: $\mathbf{(2a + 3b) : (2c : 3d) = b : d.}$

In dit voorbeeld zijn diverse eigenschappen zonder meer toegepast.

<u>Eigenschap:</u> In een evenredigheid mogen alle termen gekwadrateerd worden of mag uit alle termen de wortel getrokken worden.

Uit $a : b = c : d$ volgt $ad = bc$. Nu is:

$(ad)^2 = (bc)^2$ of: $a^2d^2 = b^2c^2$ en $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$.

Dit geldt natuurlijk ook voor hogere machten en voor hogere machtswortels.

<u>Voorbeeld:</u> Gegeven: $a + b = 9$; $\sqrt{a} : \sqrt{b} = 5 : \sqrt{7}$.

Bepaal de getallen a en b.

Kwadrateren van de evenredigheid geeft: $a : b = 25 : 7$, mits:

$(a + b) : 32 = a : 25$ of $9 : 32 = a : 25$.

$32a = 9\ .\ 25 = 225$. Hieruit volgt:

$a = \frac{225}{32} = \mathbf{7\frac{1}{32}}$ en $b = 9 - 7\frac{1}{32} = \mathbf{1\frac{31}{32}}$.

Ter oefening maken de opgaven 191 t/m 192.

Oplossingen inzenden van de opgaven 193 t/m 200.