R.T.

Inhoud Vlakke meetkunde. Nadruk verboden

HILVERSUM

Vlakke Meetkunde. Les 1

1,1. Inleiding

De vlakke meetkunde wordt in de cursus voor Radiotechnicus in zijn geheel behandeld.
In de meetkunde vereist voor Radiomonteur, waar deze meetkunde niet zo uitgebreid wordt behandeld, zijn tevens enige begrippen, o.a. uit de goniometrie opgenomen voorzover dit noodzakelijk is voor de techniek.

1,2. Lichamen, vlakken, lijnen en punten

Men kan een lichaam in drie richtingen meten. We zeggen dan dat het lichaam drie afmetingen heeft. Deze drie afmetingen noemen we lengte, breedte en hoogte. Een lichaam wordt begrensd door vlakken. Een vlak heeft slechts twee afmetingen. De grenzen van een vlak heten lijnen. Een lijn heeft maar één afmeting. De grenzen van lijnen heten punten. Punten hebben geen afmeting.

De vlakken kunnen nog verder onderscheiden worden in gebogen en platte vlakken, waarbij we de afspraak maken, dat we een vlak een plat vlak zullen noemen, indien een rechte lijn in alle richtingen in dit vlak past. Gebeurt dit niet, dus past een rechte lijn niet in alle richtingen in het vlak, dan is het een gebogen vlak.

Nu worden in de vlakke meetkunde of planimetrie alleen figuren beschouwd die in het platte vlak liggen. Deze figuren worden begrensd door lijnen, die we onderscheiden in rechte lijnen, gebroken lijnen en kromme lijnen.

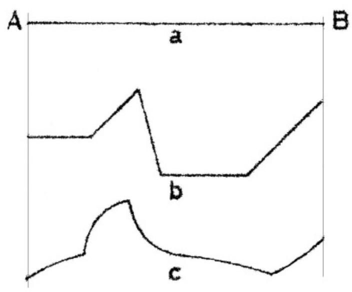


Fig. 1,1. a: rechte lijn; b: gebroken lijn; c: kromme lijn.

De gebroken lijnen zijn niet recht, maar zijn opgebouwd uit rechte delen van de kromme lijn. Van de kromme lijn is geen enkel deel recht. (zie fig. 1,1).

Indien we in de meetkunde kortweg spreken over een lijn, bedoelen we daar altijd een rechte lijn mee. Om over de lijn te kunnen spreken, plaatsen we bij het begin en het einde van de lijn een hoofdletter en spreken dan van de lijn AB, de lijn PQ enz.

Men gebruikt echter ook wel een andere schrijfwijze om een lijn aan te duiden, en wel met behulp van een kleine letter, bv. de lijn l. Dit wordt vaak gebruikt voor het aanduiden van de zijden van een driehoek. De hoofdletters worden dan gebruikt om de hoekpunten aan te geven, zoals we later zullen zien.

De figuren in de vlakke meetkunde bezitten verschillende eigenschappen, die bewezen moeten worden. Bij de bewijsvoering gaan we uit van hetgeen van de figuur gegeven is. Een vraagstuk bestaat uit drie delen nl: het gegeven; te bewijzen of gevraagd; het bewijs. Er bestaan echter enige eigenschappen die niet te bewijzen zijn, doch aangenomen moeten worden; men noemt deze eigenschappen axioma's.

Met behulp van deze axioma's kan dan de bewijsvoering opgebouwd worden.
De eerste axioma's luiden als volgt:

1. Door twee punten kan altijd slechts één en niet meer dan één rechte lijn getrokken worden.
2. Er zijn vlakken (de platte vlakken), waarin een rechte lijn geheel gelegen is, als ze er met twee punten in ligt.

R.T.

2 Vl. M. Nadruk verboden

1,2. Hoeken

We trekken in een plat vlak (het vlak van tekening de lijnen AB en AC, die elkaar in het punt A ontmoeten of zoals we in de meetkunde zeggen: elkaar in A snijden (fig. 1,2).

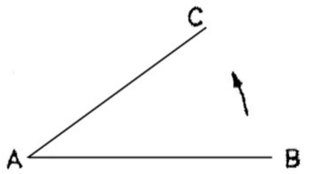


Fig. 1,2.

Tussen de beide lijnen wordt een gedeelte van het vlak ingesloten. Dit gedeelte noemen we een hoek, waarvoor het teken $\angle$ gebruikt wordt.

De lijnen AB en AC heten de benen van de hoek, het punt A heet het hoekpunt. De hoek wordt aangeduid door de letter die bij het hoekpunt staat, dus $\angle A$, of indien dit verwarring mocht veroorzaken door drie letters bv: $\angle BAC$ of $\angle CAB$.

Men lette er wel op dat het hoekpunt van de bedoelde hoek dan altijd als middelste letter dient te worden gebruikt.

De lijnen AB en AC kunnen natuurlijk iedere willekeurige stand innemen. Veronderstellen we nu dat het been AB vast ligt en dat het been AC om het punt A draaibaar is, dan wordt indien AC van AB wegdraait (we doen dit altijd linksom) de hoek steeds groter.

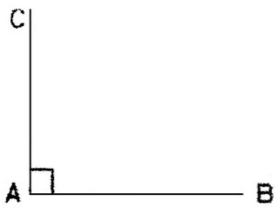


Fig. 1,3.

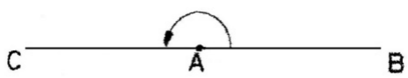


Fig. 1,4.

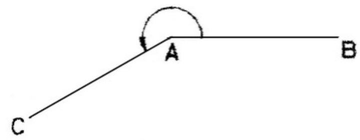


Fig. 1.5.

Ligt AC nu op AB, dan is $\angle A$ nul graden (schrijf 0°). Laten we nu AC linksom draaien, totdat AC “haaks” op AB staat (in de meetkunde spreken over loodrecht, aangegeven door het teken $\perp$), dan noemen we $\angle A$ een rechte hoek. Een rechte hoek is 90° (fig. 1,3).

Alle hoeken gelegen tussen 0° en 90° noemen we scherpe hoeken en we kunnen dus vast-stellen dat een scherpe hoek altijd kleiner dan 90° is (zie fig. 1,2).

Wordt nu AC zo ver doorgedraaid dat AC in het verlengde valt van AB, dan noemen we de aldus gevormde hoek een gestrekte hoek (zie fig. 1,4). Een gestrekte hoek bevat 180°. De hoeken $> 90°$ en $< 180°$ heten stompe hoeken. Laten we AC nu nog verder draaien, dan wordt de gevormde hoek groter dan $180°$. De hoeken groter dan $180°$ noemen we inspringende hoeken (zie fig. 1,5).

Is AC zover doorgedraaid dat hij samenvalt met AB, dan is de gevormde hoek $360°$.

Zoals we in het voorgaande gezien hebben, zeggen we dat een gestrekte hoek $180°$ is. Dus 1° is het 180ste gedeelte van een gestrekte hoek. Nu kunnen we een graad nog verder onderverdelen:

Het 60ste deel van een graad heet een minuut en het 60ste deel van een minuut heet een seconde. Als bv. hoek A, 45graden, 22 minuten en 15 seconden is, schrijven we dit verkort als volgt: $\angle A = 45°22'15''$. (Dus een minuut met 1 accent en een seconde met 2 accenten.)

Oplossingen inzenden van de opgaven 1 t/m 5.

HILVERSUM

2.1. Supplementaire en complementaire hoeken

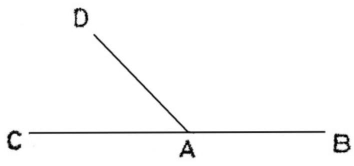


Fig. 2,1. Supplementaire hoeken.

Stelling: Twee hoeken die samen een gestrekte hoek vormen, heten supplementaire hoeken, of anders gezegd, deze hoeken zijn elkaars supplement.

In fig. 2,1 zijn $\angle DAB$ en $\angle DAC$ elkaars supplement, waaruit dus blijkt dat:
$\angle DAB = 180° - \angle DAC$ en omgekeerd.
$\angle DAC = 180° - \angle DAB$. De hoeken DAC en DAB worden ook wel nevenhoeken genoemd, daar zij neven of naast elkaar liggen.

Stelling: Nevenhoeken zijn twee hoeken die één been gemeenschappelijk hebben en waarvan de andere benen in elkaars verlengde liggen.

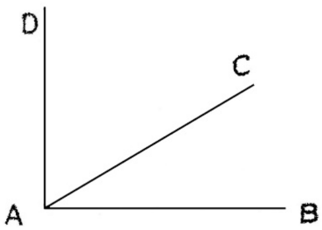


Fig. 2,2. Complementaire hoeken.

Stelling: Twee hoeken die samen een rechte hoek vormen, heten complementaire hoeken, of anders gezegd, deze hoeken zijn elkaars complement.

In fig. 2,2 zijn dus $\angle BAC$ en $\angle DAC$ elkaars complement. We dienen dus te onthouden, dat indien het supplement van een hoek wordt gevraagd, de aanvulling tot 180° wordt berekend en indien het complement, de aanvulling tot 90°.

2.2. Snijdende lijnen

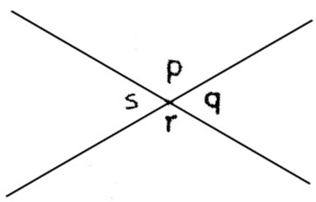


Fig. 2,3. Twee elkaar snijdende Lijnen

Snijden twee lijnen elkaar, dan worden er om het snijpunt vier hoeken gevormd, nl: $\angle p, \angle q, \angle r$ en $\angle s$ (zie fig. 2,3).
In deze figuur kunnen we gemakkelijk nagaan, dat: $\angle p$ en $\angle q$; $\angle p$ en $\angle s$; $\angle s$ en $\angle r$; $\angle r$ en $\angle q$, nevenhoeken zijn. De hoeken p en r, die tegenover elkaar liggen, noemen we overstaande hoeken, evenals de hoeken q en s.

We gaan nu de volgende stelling bewijzen:
Stelling: Overstaande hoeken zijn gelijk.
Bewijs: $\angle p + \angle q = 180°$ (nevenhoeken)
$\angle r + \angle q = 180°$ (nevenhoeken)

Hieruit volgt dat $\angle p = \angle r$. Eenzelfde bewijs kan geleverd worden voor de hoeken q en r.

2.3. Evenwijdige lijnen

Evenwijdige lijnen zijn lijnen die geen enkel punt gemeen hebben.
Voor het woord evenwijdig gebruiken we het teken $//$. Worden nu twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde, dan wordt er een groot aantal hoeken gevormd (zie fig. 2,4). De hoeken, gelegen binnen de evenwijdige lijnen AB en CD heten binnenhoeken, dit zijn dus de hoeken $d, c, e,$ en f.

De hoeken a, b, h en g, die buiten de evenwijdige lijnen liggen, heten buitenhoeken.
Om nog een verder onderscheid te maken tussen de binnenhoeken en de buitenhoeken onderling gaan we nog een onderverdeling maken. $\angle d$ ten opzichte van $\angle f$ en $\angle c$ ten opzichte van $\angle e$ noemen we verwisselende binnenhoeken en $\angle a$ t.o.v. $\angle g$ en $\angle b$ t.o.v. $\angle h$ noemen we de verwisselende buitenhoeken.

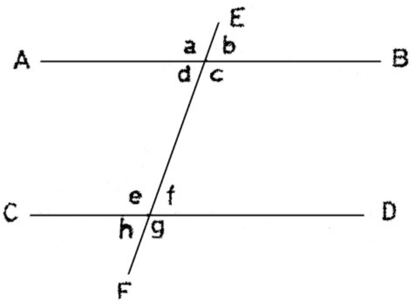


Fig. 2,4. Twee evenwijdige lijnen, gesneden door een derde.

Zo heten de hoeken d en e ook wel binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn, idem $\angle c$ en $\angle f$; en hiermee in overeenstemming $\angle h$ en $\angle a$ buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn, evenals $\angle b$ en $\angle g$.

Beschouwen we nu eens $\angle a$ en $\angle e$, dan zien we uit de figuur dat deze hoeken dezelfde ligging hebben, of met andere woorden in ligging overeen-komen. We noemen deze hoeken dan ook <u>overeen-komstige hoeken</u>.

De andere paren overeenkomstige hoeken zijn: $\angle d$ en $\angle h$; $\angle b$ en $\angle f$; $\angle c$ en $\angle g$.

Worden twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde , dan gelden de volgende stellingen: (uit het hoofd te leren).

1. Overeenkomstige hoeken zijn gelijk, dus: $\angle a = \angle e$; $\angle d = \angle h$; $\angle b = \angle f$; $\angle c = \angle g$.
2. Verwisselende binnenhoeken zijn gelijk. $\angle d = \angle f$; $\angle c = \angle e$.
3. Verwisselende buitenhoeken zijn gelijk. $\angle a = \angle g$; $\angle b = \angle h$.
4. Binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn zijn elkaars supplement.
   $\angle d + \angle e = 180°$; $\angle f + \angle c = 180°$.
5. Buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn zijn elkaars supplement.
   $\angle a + \angle h = 180°$; $\angle b + \angle g = 180°$.

De stellingen één tot en met vijf gelden ook omgekeerd.

Worden twee lijnen gesneden door een derde, dan lopen deze lijnen evenwijdig, indien we één van de volgende stellingen kunnen aantonen:

1a. Twee verwisselende binnenhoeken zijn gelijk.
2a. Twee verwisselende buitenhoeken zijn gelijk.
3a. Twee overeenkomstige hoeken zijn gelijk.
4a. Twee binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn zijn elkaars supplement.
5a. Twee buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn zijn elkaars supplement.

<u>Bewijzen van de stellingen 1 tot en met 5</u>

1. Deze stelling is niet te bewijzen, doch wel aannemelijk te maken.
   Knippen we $\angle$a uit fig.2,4 uit en leggen we deze op $\angle e$, dan blijkt dat de benen van $\angle a$ langs de benen van $\angle e$ vallen, dus zijn deze hoeken aan elkaar gelijk.
2. In bewijs 1 hebben we aangetoond dat $\angle a = \angle e$. Daar $\angle a = \angle c$ (overstaande hoeken) volgt hieruit dat $\angle e = \angle c$.
3. Daar $\angle e = \angle g$ (overstaande hoeken) en $\angle e = \angle a$ (bewijs 1) volgt hieruit dat $\angle a = \angle g$.
4. $\angle e = \angle c$; $\angle c$ en $\angle d$ zijn elkaars supplement, dus $\angle c + \angle d = 180°$.
   Hieruit volgt dan dat $\angle c + \angle d = 180°$. Het bewijs van stelling 5 gaat op dezelfde wijze.

Oplossingen inzenden van de opgaven 6 t/m 12.

3,1. Driehoeken

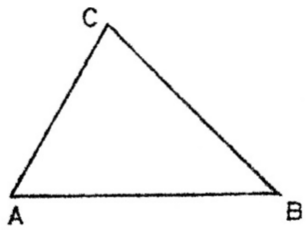


Fig. 3,1.

Een deel van een plat vlak, ingesloten door drie rechte lijnen die elkaar twee-aan-twee snijden, heet een driehoek.

De lijnen heten de zijden van de driehoek, de som van de zijden heet de omtrek van de driehoek.
In fig. 3,1 zijn AB, BC en AC de zijden en $AB + BC + AC$ is de omtrek. De punten A, B en C zijn de hoekpunten, terwijl bij de hoekpunten resp: $\angle A, \angle B$ en $\angle C$ liggen.
De zijden en hoeken noemen we gezamenlijk de elementen van de driehoek.

We spreken over de driehoek ABC en schrijven $\Delta\, ABC$, de volgorde, waarin men de letter noemt, is volkomen willekeurig.

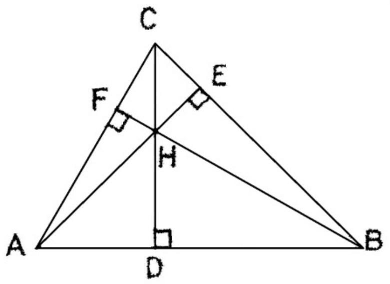


Fig. 3,2.

Vanuit een hoekpunt kan men een lijn trekken, die loodrecht staat op de zijde tegenover dat hoekpunt, bv. de lijn CD in fig. 3,2. Zo'n lijn heet een hoogtelijn.

Vanuit ieder hoekpunt kunnen we dus een hoogtelijn tekenen. De drie hoogtelijnen die in een driehoek getekend kunnen worden, gaan altijd door één punt. Dit punt noemen we hoogtepunt H.

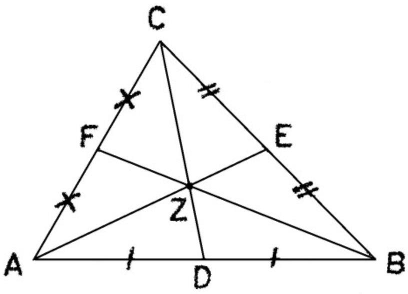


Fig. 3,3.

Een lijn uit een hoekpunt getrokken naar het midden van de overstaande zijde heet een zwaartelijn of mediaan. De zwaartelijnen in een driehoek gaan eveneens alle door één punt, het zwaartepunt Z van de driehoek.

In fig. 3,3 zijn de drie zwaartelijnen getekend, hierbij is $AD = BD; BE = EC$ en $AF = FC$.

Een lijn, die een hoek van een driehoek middendoor deelt, heet de bissectrice van de hoek. De drie bissectrices van een driehoek gaan weer door **één** punt. In fig. 3,4 is dus $\angle A_1 = \angle A_2$; $\angle B_1 = \angle B_2$; $\angle C_1 = \angle C_2$.

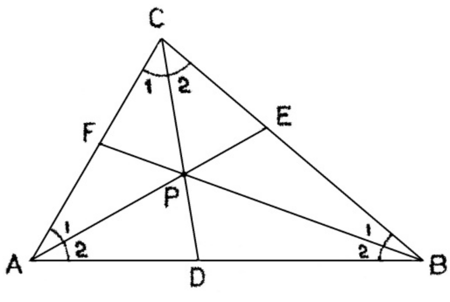


Fig. 3,4.

3,2. Eigenschappen van de hoeken van een driehoek

Stelling: De som van de hoeken van een driehoek bedraagt 180 graden.
Gegeven: $\Delta\, ABC$.
Te bewijzen: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.
Bewijs: Trek door C een lijn $DE // AB$. De lijn DE noemen we een hulplijn (hulplijnen dienen altijd gestippeld te worden getekend, zie fig. 3,5).

Nu is $\angle A = \angle DCA$ (verwisselende binnen-hoeken bij twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde zijn gelijk).
Evenzo is $\angle B = \angle ECB$.

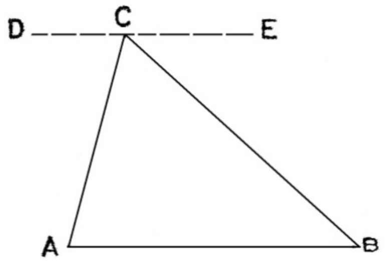


Fig. 3,5.

$\angle DCE$ is een gestrekte hoek, dus 180°.
We kunnen nu schrijven $\angle DCA + \angle ACB + \angle BCE = 180°$ of $\angle A + \angle ACB + \angle B = 180°$.
Hieruit volgt dat de som van de hoeken van een driehoek samen 180° is.

Uit deze stelling volgt direct dat in een driehoek nooit meer dan één rechte hoek kan voorkomen en eveneens nooit meer dan één stompe hoek.

Een inspringende hoek is niet mogelijk, daar deze alleen reeds groter is dan 180°.

3,3. Indeling van driehoeken

Zijn in een driehoek alle hoeken scherp, dan heet zo'n driehoek, scherphoekige driehoek (fig. 3,6a), is één der hoeken recht, dan rechthoekige driehoek (fig. 3,6b), en is één der hoeken stomp, stomphoekige driehoek (fig. 3,6c).

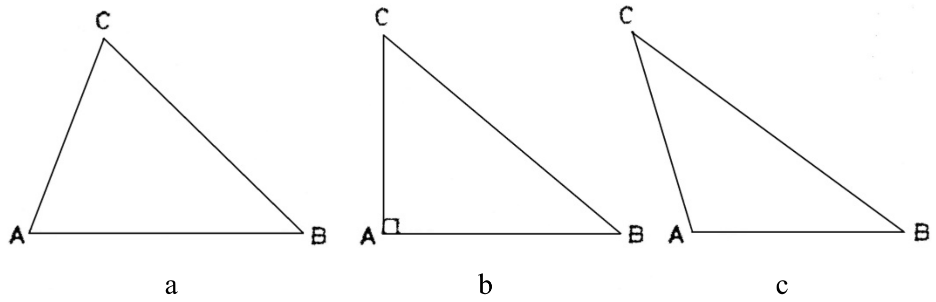


Fig. 3,6. a: scherphoekige driehoek; b: rechthoekige driehoek; c: stomphoekige driehoek.

Bij een rechthoekige driehoek wordt aan de zijden een aparte benaming gegeven. De zijden, die om de rechte hoek liggen, zijn de rechthoekszijden; de zijde die tegenover de rechte hoek is de schuine zijde of hypotenusa. Daar in fig. 3,6b $\angle A$ 90 graden is, is dus $\angle B + \angle C = 90°$. Dan zijn dus $\angle B$ en $\angle C$ elkaars complement, waaruit volgt, dat $\angle B = 90° - \angle C$ of $\angle C = 90° - \angle B$.

Indien we een van de zijden van een driehoek verlengen, ontstaat buiten de driehoek een nieuwe hoek, die de buitenhoek van de driehoek wordt genoemd. Om een duidelijk onderscheid te maken noemen we de hoeken die binnen de driehoek zijn gelegen, de binnenhoeken van de driehoek.

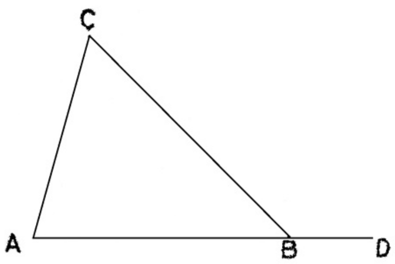


Fig. 3,7,

Stelling: Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de niet-aanliggende binnenhoeken.
Gegeven: $\Delta\, ABC; BD$ is het verlengde van AB.
Te bewijzen: $\angle CBD = \angle A + \angle C$.
Bewijs: $\angle CBD$ en $\angle ABC$ vormen samen een gestrekte hoek, dus $\angle CBD + \angle ABC = 180°$.

Daar in een driehoek de som van de binnenhoeken gelijk aan 180° is, is dus:
$\angle A + \angle C + \angle ABC = 180°$.

Hieruit volgt dan, dat
$\angle A + \angle C = \angle CBD$ is.

Oplossingen inzenden van de opgaven 13 t/m 16.

HILVERSUM

4,1. De begrippen "groter dan" en "kleiner dan"

Tekenen we een lijn AB en vanuit B een tweede lijn BC zodanig dat AB en BC één rechte lijn vormen, dan zeggen we dat deze beide lijnen in elkaars verlengde liggen.

Worden twee lijnen zo geplaatst dat de uiteinden van beide lijnen samenvallen, dan zijn deze lijnen even lang. Liggen de lijnen geheel op elkaar, dan noemen we ze samenvallende lijnen.

Vallen beide uiteinden niet samen, dan zijn ze ongelijk en is dus de ene lijn groter dan de andere. In de wiskunde gebruikt men voor de benamingen "groter dan" en "kleiner dan" een bepaald teken. Voor "groter dan" gebruikt met het teken $>$ en voor "kleiner dan" het teken $<$. (eenvoudig te onthouden als volgt: wanneer men van het teken een K kan maken, dat betekent het "kleiner dan".)

Dus: $AB > CD$ wil zeggen AB groter dan CD.
en $PQ < RS$ wil zeggen PQ kleiner dan RS.

4,2. Stelling: Door een punt P buiten een lijn AB kan slechts één lijn getrokken worden, die evenwijdig is met AB

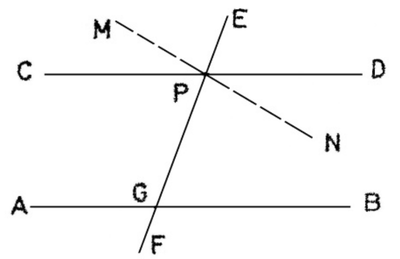


Fig. 4,1.

Gegeven: De lijn AB en een punt buiten AB.
Te bewijzen: Door P slechts één lijn te trekken $// AB$.
Bewijs: Trek door P een lijn, die AB snijdt, dus in fig. 4,1 de lijn EF.
Maak $\angle EPD$ gelijk aan $\angle EGB$, dan is dus volgens stelling 1a $CD // AB$. (zie pag.4.)

Veronderstellen we nu dat er door P nog een lijn evenwijdig AB getekend kan worden, bv, de lijn MN, dan moest tevens $\angle EPN = \angle EGB$ zijn.

Maar $\angle EPD = \angle EGB$, dus is $\angle EPN = \angle EPD$. Dit is echter niet waar, dus de veronderstelling, die we gemaakt hebben, is niet juist; er is geen andere lijn meer mogelijk.

Plaatsen we twee hoeken zo, dat de hoekpunten op elkaar en de benen langs elkaar vallen, dan zijn deze twee hoeken gelijk. Hieruit volgt dus, dat alle gestrekte hoeken aan elkaar gelijk zijn en eveneens dat alle rechte hoeken aan elkaar gelijk zijn.

4,3. Een driehoek waarvan twee zijden even lang zijn, heet een gelijkbenige driehoek

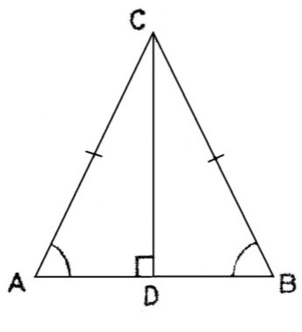


Fig. 4,2.

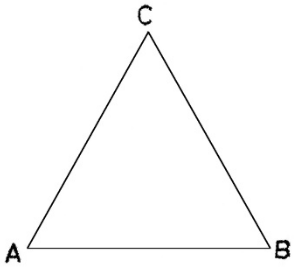
De gelijke zijden. zijn de benen van de driehoek. In fig. 4,2 is $AC = BC$. De zijde AB noemen we de basis van de driehoek, de hoeken A en B, die aan de basis grenzen, heten de basishoeken van de driehoek. Het punt C is het toppunt van de driehoek, terwijl we de $\angle C$ de tophoek noemen.

Deze afspraken gelden voor iedere driehoek en niet speciaal voor een gelijkbenige.

Stelling: In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.

Deze stelling kunnen we niet bewijzen, doch indien we $\Delta\ ABC$ van fig. 4,2 uitknippen en omvouwen om de lijn CD, dan zullen de benen van $\angle A$ langs die van $\angle B$ vallen, dus is $\angle A = \angle B$.

Zijn in een driehoek alle zijden even lang, dan heet de nu gevormde driehoek een gelijkzijdige driehoek. We kunnen nu eenvoudig bewijzen dat in een gelijkzijdige driehoek de drie hoeken even groot zijn en dus ieder gelijk aan 60°.



Gegeven: $\Delta\, ABC$ is gelijkzijdig.
Te bewijzen: $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.
Bewijs: $AC = BC$, dus $\angle A = \angle B$.
$AB = BC$, dus $\angle A = \angle C$.
Hieruit volgt dat $\angle A = \angle B = \angle C$.
We weten dat $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ is.
Vullen we hierin dat $\angle B = \angle A$ en $\angle C = \angle A$,
dan vinden we: $\angle A + \angle A + \angle A = 180°$
$of\ 3\angle A = 180°$ en hieruit volgt:
$\angle A = \frac{180°}{3} = 60°$. Dus $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

Fig. 4,3. Gelijkzijdige driehoek.

4,4.

We zullen nu een overzicht geven wat we van de driehoeken hebben geleerd.
Bij de scherphoekige driehoeken zijn alle hoeken scherp, dus alle kleiner dan 90°. Is er één hoek recht, dan noemen we die driehoek een rechthoekige driehoek. De beide andere hoeken zijn dan scherp, dus kleiner dan 90°.

In een gelijkbenige rechthoekige driehoek is bv. de tophoek recht, dus 90°. De som der beide andere hoeken is dan ook 90°, aangezien in een driehoek de som der hoeken 180° is. Maar de driehoek is gelijkbenig, dus de beide scherpe hoeken zijn aan elkaar gelijk, dus de helft van 90°.
De hoeken zijn dan ieder 45°. Is één hoek van een driehoek groter dan 90°, dan heet die driehoek een stomphoekige driehoek, de beide andere hoeken zijn scherp en hun som is kleiner dan 90°, aangezien de stompe hoek groter is dan 90°.

Een gelijkbenige driehoek is een driehoek, waarvan twee zijden gelijk zijn. De hoeken, gelegen aan die gelijke zijden, zijn dan ook gelijk.
In een gelijkzijdige driehoek zijn alle zijden gelijk en daardoor ook alle hoeken. Aangezien de som der hoeken van een driehoek 180° is, zijn dus in een gelijkzijdige driehoek alle hoeken gelijk aan 60°.

Een buitenhoek is gelijk aan de som van de niet-aanliggende binnenhoeken.

Bij de meeste opgaven gaat men van het gegeven uit om door een redenering te komen tot datgene wat bewezen moet worden. zulk een bewijs heet een direct bewijs. Soms is het echter eenvoudiger om uit te gaan van hetgeen in strijd is met wat er bewezen moet worden, m.a.w. men neemt voor een ogenblik aan, dat het gestelde niet waar is. door redenering komt men dan tot een gevolgtrekking, die in verband met het gegevene stelling onmogelijk is.

Een bewijs dat op deze manier gegeven wordt, heet een indirect bewijs. Een dergelijk bewijs is geleverd bij punt 4,2

Oplossingen inzenden van de opgaven 17 t/m 20.

5,1 Eigenschappen van de zijden van een driehoek

In les 4 hebben we gesproken over de gelijkbenige en gelijkzijdige driehoeken, in de meeste gevallen echter zullen de zijden niet aan elkaar gelijk zijn.

We komen nu tot de volgende stelling:

Indien van een driehoek twee zijden ongelijk zijn, dan staat tegenover de grootste van die zijden een grotere hoek dan tegenover de kleinste.

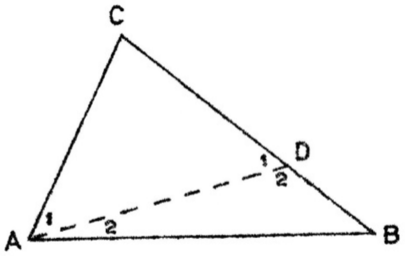


Fig. 5,1.

Gegeven: $CE > AC.$
Te bewijzen: $\angle CAB > \angle CBA.$ (fig. 5,1).
Bewijs: Trek de hulplijn AD zodanig, dat $AC = CD,$ dus $\Delta\, ACD$ is gelijkbenig, dan is $\angle A_1 = \angle D_1.$
Maar $\angle D_1 = \angle A_2 + \angle B,$ daar $\angle D_1$ de buitenhoek van $\Delta\, ABD$ is. Dus: $\angle A_1 = \angle A_2 + \angle B.$

Tellen we nu aan beide kanten van het gelijkteken $\angle A_2$ op, dan is $\angle A_1 + \angle A_2 = 2\angle A_2 + \angle B$ en $\angle A_1 + \angle A_2 = \angle A$, dus is $\angle A = \angle B + 2\angle A_2.$
Hieruit volgt dat $\angle B$ vermeerderd moet worden met $2\angle A_2$ om $\angle A$ te krijgen, dus: $\angle A$ is groter dan $\angle B$ of $\angle CAB > \angle CBA.$

Bovengenoemde stelling geldt ook omgekeerd:
Als van een driehoek twee hoeken ongelijk zijn, dan ligt tegenover de grootste van die hoeken een grotere zijde dan tegenover de kleinste.

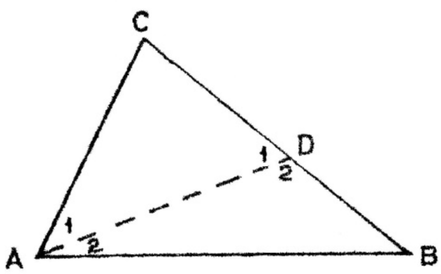
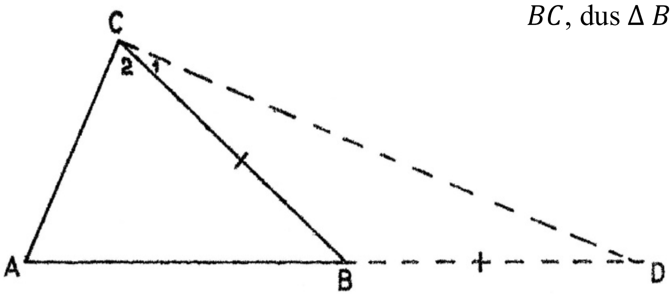


Fig. 5,2.

Gegeven: $\angle A > \angle B.$
Te bewijzen: $BC > AC.$ (fig. 5,2).
Bewijs: Trek weer de hulplijn AD, zodanig dat $AC = CD.$ Nu is weer $\angle A_1 = \angle D_1.$
Tegenover $\angle CAB$ ligt de zijde $BC.$ Dus $BC > CD,$ maar $AC = CD$, waaruit volgt dat $BC > AC$ is.

5,2. Stelling: In een driehoek is één zijde kleiner dan de som van de beide ander

Gegeven: $\Delta\, ABC$ is willekeurig.
Te bewijzen: $AC < AB + BC.$ (fig. 5,3).
Bewijs: Verleng AB met een stuk BD dat gelijk is aan BC, dus $\Delta\, BCD$ is gelijkbenig en $AD = AB + BC.$



.
Fig. 5,3.

Dus moeten we trachten te bewijzen dat in $\Delta\, ADC$ de zijde $AD > AC.$ Nu is $\angle D = \angle C_1$, dus is $\angle ACD$ groter dan $\angle D$ en, daar tegenover de grootste hoek de grootste zijde ligt, is dus $AD > AC$ of $AB + BD > AC$, doch $BD = BC$, dus $AB + BC > AC,$ hetgeen we moesten bewijzen.

Stelling: In een driehoek is één zijde groter dan het verschil van de beide andere.

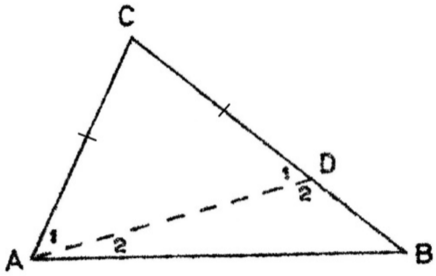


Fig. 5,4.

Gegeven: $\Delta\, ABC$ is willekeurig.
Te bewijzen: $AB > BC - AC$. (fig. 5,4).
Bewijs: Trek de lijn AD zodanig dat $AC = CD$.
Uit de figuur zien we dan, dat $BD = BC - CD$, doch $CD = AD$, dus kunnen we ook schrijven, dat $BD = BC - AC$. We moeten dus in $\Delta\, ABD$ bewijzen dat $AB = BD$ is. In $\Delta\, ADC$ is $\angle A_1 = \angle D_1$, en daaruit volgt, dat $\angle A_1$ en $\angle D_1$ scherp moeten zijn, aangezien anders hun som groter of gelijk aan 180° zal worden, hetgeen niet mogelijk is.
$\angle D_1 + \angle D_2 = 180°$, dus moet $\angle D_2$ stomp zijn.
In een driehoek is slechts één stompe hoek mogelijk, dus in $\Delta\, ABD$ is $\angle D_2$ groter dan $\angle A_2$, waaruit volgt dat $AB > BD$ is, dus $AB > BC - AC$.

We zullen nu met het tot nu toe geleerde een voorbeeld behandelen.
Voorbeeld: Bewijs, dat wanneer men een punt binnen een driehoek verbindt met de uiteinden van een zijde, de som van de verbindingslijnen kleiner is dan de som van de omliggende zijden.

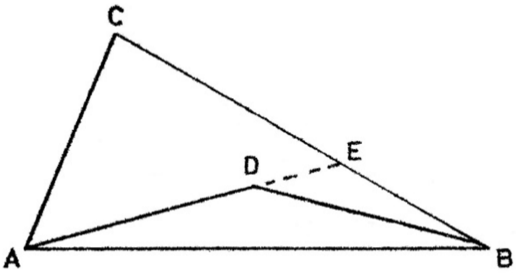


Fig. 5,5.

Gegeven: $\Delta\, ABC. D$ ligt binnen $\Delta\, ABC$.
Te bewijzen: $AD + BD < AC + BC$. (fig. 5,5).
Bewijs: Verleng AD tot hij BC in E snijdt.
In $\Delta\, AEC$ geldt nu, dat $AC + EC > AE$.
Hiervoor kunnen we ook schrijven:

$$AC + EC > AD + DE$$

In $\Delta\, BDE$ geldt $\underline{DE + BE > BD}$ +
Opgeteld geeft dit: $AC + EC + DE + BE > AD + DE + BD$.
Nu is $EC + BE = BC$, dus: $AC + BC + DE >$
$> AD + BD + DE$. Aan beide kanten van het $>$-teken zien we DE voorkomen.
Verminderen we aan beide zijden met hetzelfde bedrag DE, dan blijft de ongelijkheid natuurlijk bestaan, dus:
$AC + BC > AD + BD$.

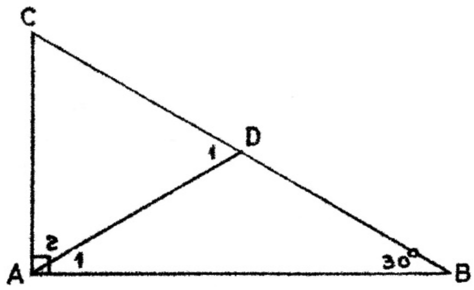


Fig. 5,6.

Stelling: In een rechthoekige driehoek ligt tegenover een hoek van 30° een zijde die de helft van de hypotenusa is. (fig. 5,6).
(dit is een zeer belangrijke stelling, waarvan een veelvuldig gebruik wordt gemaakt, bv. in de goniometrie.)
Gegeven: $\Delta\, ABC$ is rechthoekig is A.
$\angle B = 30°$.
Te bewijzen: $AC = ½\, BC$.
Bewijs: Trek AD zodanig, dat $\angle A_1 = 30°$, dan is $\Delta\, ABD$ gelijkbenig en $AD = BD$.
Nu is $\angle A_2 = 60°$ en $\angle C = 60°$, dus $\angle D_1 = 60°$, waaruit volgt, dat $\Delta\, ACD$ gelijkzijdig is; dus: $AC = CD = AD$ en daar tevens $AD = BD$ was, is dus $AC = ½\, BC$.

Oplossingen inzenden van de opgaven 21 t/m 25.

6,1. Definities der goniometrische verhoudingen

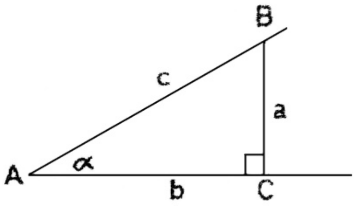


Fig. 6,1.

In de goniometrie worden de begrippen gedefinieerd voor rechthoekige driehoeken. We maken gebruik van de betrekkingen, die er bestaan tussen de zijden en de hoeken van een rechthoekige driehoek. Laat men uit een willekeurig punt B van het ene been van de hoek α (spreek uit alpha) een loodlijn neer op het andere been, dan is de verhouding van het lijnstuk a tot het lijnstuk b constant. Dat wil zeggen, waar men het pnt B ook neemt de verhouding $\frac{a}{b}$ blijft steeds even groot. Dit geldt voor alle verhoudingen die in de figuur voorkomen. Elk van deze verhoudingen heeft een naam.

Beschouwen we de zijden van de rechthoekige driehoek ABC, (fig. 6,1) ten opzichte van de hoek α, dan noemen we $BC = a$ de overstaande rechthoekszijde; $AC = b$ de aanliggende reschthoekszijde en $AB = c$ de schuine zijde of hypotenusa. We komen nu tot de volgende definities, die uit het hoofd geleerd dienen te worden.

$$\text{sinus } \alpha = \sin\alpha = \frac{overstaande\ rechthoekszijde}{schuine\ zijde} \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\text{cosinus } \alpha = \cos\alpha = \frac{aanliggende\ rechthoekszijde}{schuine\ zijde} \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\text{tangens } \alpha = \tan\alpha = \frac{overstaande\ rechthoekszijde}{aanliggende\ rechthoekszijde} \ldots\ldots\ldots(3)$$

<u>Opmerking:</u> Men spreekt over sinus α, cosinus α en tangens α en schrijft afgekort $\sin\alpha;\ \cos\alpha;\ \tan\alpha$. Men dient er verder goed op te letten, dat sin, cos, tan op zichzelf geen betekenis hebben, doch altijd met een hoek gebruikt moeten worden.

Uit $\Delta\, ABC$ (fig. 6,1) kunnen we zien dat:

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{a}{c}}\ ; \qquad \boldsymbol{\cos\alpha = \frac{b}{c}}\ ; \qquad \text{en} \qquad \boldsymbol{\tan\alpha = \frac{a}{b}}\ .$$

Worden de letters in de figuur op andere plaatsen gezet, dan luiden deze verhoudingen natuurlijk anders, zodat men het beste doet om deze formules (1), (2) en (3) uit het hoofd te leren.

De genoemde verhoudingen kunnen ook omgekeerd genomen worden. deze omgekeerde waarden heten respectievelijk cosecans α ($\csc\alpha$), secans α ($\sec\alpha$) en cotangens α ($\cot\alpha$). Tussen de haakjes staat wederom de schrijfwijze vermeld van de betrokken verhoudingen. We komen nu eenvoudig tot de volgende betrekkingen, die weer uit het hoofd geleerd moeten worden.

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \text{ dus: } \sin\alpha\,.\csc\alpha = 1.$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ dus: } \cos\alpha\,.\sec\alpha = 1.$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}, \text{ dus: } \tan\alpha\,.\cot\alpha = 1.$$

De genoemde zes verhoudingen heten de goniometrische verhoudingen van de hoek α, daar het verhoudingen zijn van lijnstukken. Met andere woorden: daar we twee lijnstukken, die in dezelfde eenheid zijn uitgedrukt op elkaar delen, zijn de goniometrische verhoudingen van de hoeken <u>onbenoemde getallen</u>.

Onbenoemde getallen zijn getallen waaraan geen eenheid wordt toegevoegd.
<u>Opmerking:</u> De meervoudsvormen van de goniometrische verhoudingen zijn: sinussen, cosinussen, tangenten, cotangenten, secanten en cosecanten.

6,2. Betrekkingen tussen de goniometrische verhoudingen van de scherpe hoek

In fig. 6,1 zien we dat: $\sin\alpha = \frac{a}{b}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; en $\tan\alpha = \frac{a}{b}$. Hieruit volgt dat:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \tan\alpha \quad \text{en} \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{c} \times \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \cot\alpha.$$

Dus geldt: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

In de meetkunde bestaat een stelling, die later behandeld zal worden, doch die we nu even willen noemen om deze stelling in de goniometrie toe te kunnen passen. Deze stelling heet de stelling van Pythagoras en luidt:

In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten der rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde.

Beschouwen we weer fig. 6,1, dan kunnen we deze stelling weergeven als $a^2 + b^2 = c^2$. Delen we beide leden van deze gelijkheid door c^2, dan vinden we:
$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ en, daar $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ en $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ krijgen we na invulling hiervan:
$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$. Voor de betrekking $(\sin\alpha)^2$ gaan we een andere schrijfwijze invoeren, nl: $sin^2\alpha$. Men lette er wel op, dat hiermee niet bedoeld wordt de hoek in het kwadraat, dit schrijven we als $(\alpha)^2$, doch $\sin\alpha\,.\,\sin\alpha$.
Idem: $cos^2\alpha$; $tan^2\alpha$; $sec^2\alpha$; $csc^2\alpha$ en $cot^2\alpha$. We kunnen dus schrijven:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Wordt er gevraagd een goniometrische opgave te vereenvoudigen, zet dan eerst de secanten en cosecanten om in sinussen en cosinussen met de formules:
$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ en $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ en daarna de tangenten en cotangenten in sinussen cosinussen met:
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ en $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Tracht dan met $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ de vorm verder te vereenvoudigen. Tot slot het antwoord zo eenvoudig mogelijk schrijven.

<u>Voorbeeld:</u> Vereenvoudig: $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cot\alpha)} \times \frac{\sec\alpha\,(\tan\alpha - 1)}{\sec\alpha - \csc\alpha}$

<u>Oplossing:</u> $$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha\,(1+\cot\alpha)} \times \frac{\frac{1}{\cos\alpha}(\tan\alpha - 1)}{\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)} \times \frac{\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1\right)}{\frac{\sin\ - \cos\alpha}{\sin\alpha\ \cos\alpha}} =$$

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\frac{\sin\alpha\,(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin\alpha}} \times \frac{\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha}\right)}{\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha\ \cos\alpha}} =$$

$$1 \times \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{cos^2\alpha} \times \frac{\sin\alpha\ \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven 26 t/m 32.

HILVERSUM

7,1. De sinus van hoeken van 0° tot 360°

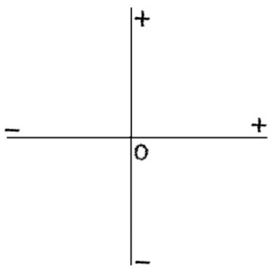


Fig. 7,1.

In fig. 7,1 zijn twee lijnen getekend die loodrecht op elkaar staan. Het snijpunt van deze beide lijnen heet de oorsprong O.

Deze beide lijnen zijn te beschouwen als twee getallenrechten, zoals in de rekenkunde (les 2) behandeld is. Deze twee getallenrechten staan hier loodrecht op elkaar. Op de horizontale getallenrechte worden de positieve eenheden van O uit naar rechts uitgezet en de negatieve eenheden naar links.
Op de verticale rechte naar boven positief en naar beneden negatief. Zo'n stelsel van twee rechte lijnen heet een assenkruis of coördinatenstelsel.
Met behulp van dit assenkruis zullen we nagaan hoe de sinus van een hoek α verandert, wanneer hoek α van waarde verandert. In fig. 7,2 beschouwen we OA gelegen op de horizontale rechte als een vaste lengte, terwijl de lijn OP, die dezelfde lengte heeft als OA, om O draaibaar wordt gedacht. Als positieve draairichting nemen we de richting aan, tegengesteld aan de draairichting van de wijzers van de klok. Het punt P beschrijft dan de getekende cirkel met OP als straal. Voor de lengte OP kiezen we een bepaalde eenheid (bv. 1 dm) en noemen de cirkel dan de <u>eenheidscirkel</u>. Waar het punt P zich op de cirkel bevindt, steeds geldt dus: $OP = 1$.
In $\Delta\ OEP$ is nu:
$\sin\alpha = \frac{PE}{OP} = \frac{PE}{1} = PE.$

Door de aanname $OP = 1$ zien we,
Dat in fig. 7,2 de sinus van hoek α voorgesteld wordt door het aantal eenheden dat het lijnstuk PE bevat. Dit aantal eenheden is dus Een gedeelte van de aangenomen eenheid.

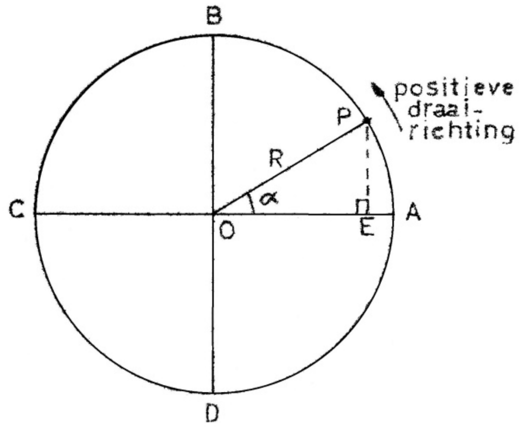


Fig. 7,2.

Is nu $\alpha = 0$, dan ligt het draaibare been OP op het vaste been OA. Het lijnstuk PE is dan gelijk aan nul. Hieruit volgt dus dat: $\sin 0° = \frac{0}{OA} = 0$.

Bij het groter worden van $\angle\alpha$ neemt de waarde van PE ook toe, dus $\sin\alpha$ wordt groter.
PE bereikt zijn grootste waarde als OP samenvalt met OB, of wel als OP loodrecht op OA staat.
Dan is $\angle\alpha = 90°$ en dus $\sin 90° = \frac{OP}{OB} = \frac{OB}{OB} = 1$.
Samengevat blijkt dus, dat <u>indien α toeneemt van 0° tot 90°, $\sin\alpha$ toeneemt van 0 tot 1</u>.

Om nu de diverse lijnstukken PE, die gevormd worden indien $\angle\alpha$, alle mogelijke waarden inneemt van 0° tot 90° beter met elkaar te kunnen vergelijken, gaan we echter iets anders te werk, dan in het voorgaande gedaan is. In fig.3,7 zijn twee standen van P getekend, nl. P_1 en P_2, dus voor twee verschillende hoeken α. In plaats van vanuit P_1 en P_2 loodlijnen op OA neer te laten, doen we dit nu op de verticale as. Nu is OE_1 even groot als de afstand van P_1 tot OA en eveneens is OE_2 even groot als de afstand tot OA.
We kunnen dus ook zeggen dat $\sin\alpha_1 = OE_1$ en $\sin\alpha_2 = OE_2$.

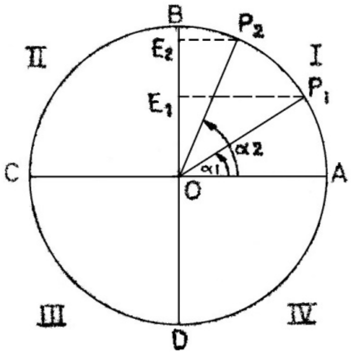


Fig. 7,3.

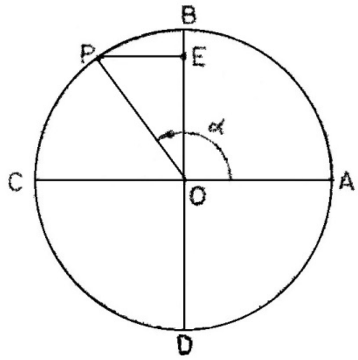


Fig. 7,4.

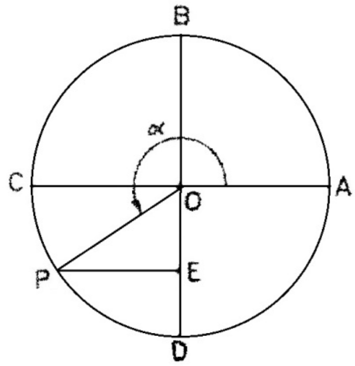


Fig. 7,5.

De cirkel wordt door het assenkruis in vier delen verdeeld, die we de kwadranten noemen. De kwadranten aangeduid met de cijfers I, II, III en IV. Wordt α nu groter dan $90°$, maar kleiner dan $180°$, dan ligt α dus in het tweede kwadrant. Uit fig. 7,4 blijkt dat de sinus van de hoek afneemt, als α toeneemt van $90°$ tot $180°$. Als OP samenvalt met OC, dat wil zeggen, als $\angle\alpha = 180°$ is, dan is $OE = 0$ geworden, waaruit dus volgt $\sin 180° = 0$. Wordt $\angle\alpha$ groter dan $180°$, dan komt het punt E op het negatieve deel van de verticale as te liggen (fig.7,5).

Uit de figuren zien we nu eenvoudig in dat indien $\angle\alpha$ zich in het derde of vierde kwadrant bevindt, de sinus van die hoek negatief zal zijn.

Bij $270°$ wordt de minimale waarde bereikt, dus $\sin 270° = -1$; bij een hoek van $360°$ is de gehele cirkel doorlopen en valt OP weer samen met OA, waaruit weer volgt dat $\sin 360° = \sin 0° = 0$.

<u>Samenvatting</u>: $\sin 0° = 0$; $\sin 90° = 1$.
Groeit $\angle\alpha$ aan van $0°$ tot $90°$, dan neemt $\sin\alpha$ toe van 0 tot 1.
$\sin 90° = 1$; $\sin 180° = 0$.
Neemt $\angle\alpha$ toe van $90°$ tot $180°$, dan neemt $\sin\alpha$ af van 1 tot 0.
$\sin 180° = 0$; $\sin 270° = -1$.
Neemt $\angle\alpha$ toe van $180°$ tot $270°$, dan neemt $\sin\alpha$ af van 0 tot -1.
$\sin 270° = -1$; $\sin 360° = 0$.
Neemt $\angle\alpha$ toe van $270°$ tot $360°$, dan neemt $\sin\alpha$ toe van -1 tot 0.

Bij het nog verder toenemen van $\angle\alpha$ dus groter dan $360°$, worden alle genoemde gevallen wederom doorlopen. Men dient er goed op te letten, dat hoewel $\angle\alpha$ alle waarden van nul graden tot oneindig veel graden kan doorlopen, $\sin\alpha$ nooit groter wordt dan $+1$ en nooit kleiner wordt dan -1.

In een van de volgende lessen zullen we het gehele verloop van een sinus bekijken voor hoeken die groter dan $360°$ zijn tot oneindig grote hoeken toe en voor hoeken, die kleiner dan $0°$ zijn tot min-oneindig aan toe.

Oplossingen inzenden van de opgaven 33 t/m 38.

8,1. De cosinus van hoeken van 0° tot 360°

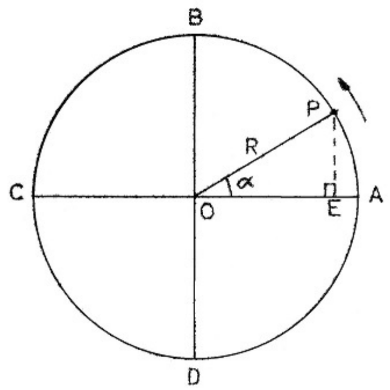


Fig. 8,1.

In fig. 8,1 is weer de cirkel met de straal gelijk aan 1, dus de eenheidscirkel getekend.
Uit de figuur kunnen we aflezen dat:
$\cos\alpha = \frac{OE}{OP} = \frac{OE}{1} = OE$ (daar $OP = 1$).
De waarde van $\cos\alpha$ is dus nu voor verschillende waarden van α steeds af te lezen op de horizontale as, terwijl dit bij $\sin\alpha$ op de verticale as geschiedde.
Beschouwen we de twee loodrecht op elkaar staande lijnen weer als de assen van een assenkruis en gelden weer dezelfde kwadranten, dan blijkt dat de cosinus in de kwadranten I en IV positief is en in de kwadranten II en III negatief.

Is $\angle\alpha = 0°$, dan ligt OP op OA en dus $\cos 0° = °1$. Wordt hoek α groter, dan neemt de cosinus van die hoek af totdat $\alpha = 90°$ is geworden, dan staat $OP \perp OA$ en is $\cos 90° = 0$. We kunnen dus zeggen, dat: <u>indien α toeneemt van 0° tot 90° $\cos\alpha$ afneemt van 1 tot 0</u>.

In het tweede kwadrant is $\cos\alpha$ negatief, de waarde wordt bij toenemende $\angle\alpha$ steeds meer Negatief, totdat bij 180° het minimum bereikt wordt, $\cos 180° = -1$.

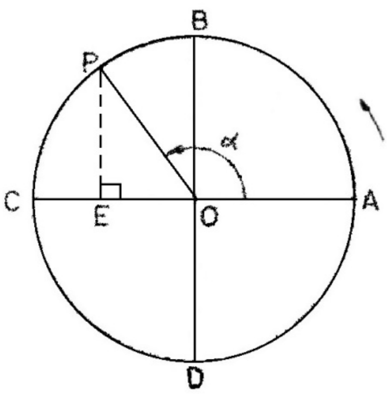


Fig. 8,2.

In fig.8,2 wordt voor een willekeurige waarde van α (echter gelegen tussen 90° en 180°) de cosinus voorgesteld door het lijnstuk OE. Men dient er echter goed rekening mee te houden dat OE dus een negatieve grootheid is.

Gaat α nu verder toenemen van 180° tot 270°, dan neemt ook de cosinus van hoek α weer toe en wel vanaf -1 tot 0. Wordt α groter dan 270°, dan wordt $\cos\alpha$ weer positief en is $\alpha = 360°$, dan is $\cos 360°$ weer gelijk aan 1 geworden.

Uit deze figuur blijkt dat de cosinus niet groter dan $+1$ en niet kleiner dan -1kan worden, dus hetzelfde als bij de sinus.

We zullen nu voor de sinus en de cosinus de zogenaamde hoofdwaarden naast elkaar in een tabel vermelden.
Deze waarden dienen uit het hoofd geleerd te worden. Tevens zijn de hoofdwaarden van de tangens vermeld, die gevonden kunnen worden uit de betrekking: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$.

$\sin 0° = 0$	$\cos 0° = 1$	$\tan 0° = 0$
$\sin 90° = 1$	$\cos 90° = 0$	$\tan 90° = \pm\infty$
$\sin 180° = 0$	$\cos 180° = -1$	$\tan 180° = 0$
$\sin 270° = -1$	$\cos 270° = 0$	$\tan 270° = \pm\infty$
$\sin 360° = 0$	$\cos 360° = 1$	$\tan 360° = 0.$

(het teken ∞ betekent oneindig.)

Om na te gaan , hoe de tangens van een hoek α verandert als α toeneemt van 0° tot 90°, beschouwen we weer een cirkel met straal gelijk 1 en 0 als middelpunt (zie fig. 8,3). In het punt A, waar de horizontale as de cirkel snijdt, trekken we de raaklijn aan de cirkel.

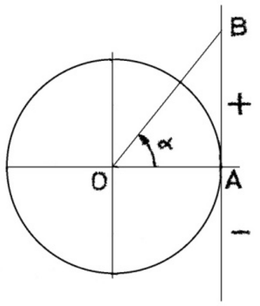


Fig. 8,3.

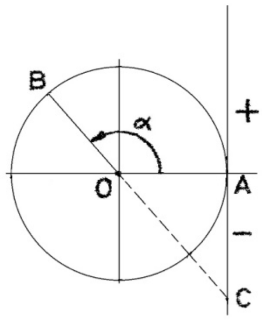


Fig. 8,4.

Het verlengde van het draaiende been snijdt deze raaklijn in het punt B.

Nu is volgens de definitie van de tangens $\tan\alpha = \frac{AB}{OA}$. Hierin is OA weer de straal van de eenheidscirkel, dus gelijk aan 1. Dan is $\tan\alpha = AB$.

We kunnen de tangens blijkbaar voorstellen door het lijnstuk AB.

Het punt A wordt nu als nulpunt genomen van de raaklijn. Naar boven toe rekenen we de waarden positief, naar beneden toe negatief. Indien nu $\angle\alpha$ toeneemt, neemt ook $\tan\alpha$ toe, daar B zich steeds verder van A verwijdert. Hoe dichter $\angle\alpha$ tot 90° nadert, hoe verder B weg komt te liggen. Is $\alpha = 90°$ geworden, dan is het punt B oneindig ver van A verwijderd, dus het lijnstuk AB is oneindig groot geworden.

Samengevat vinden we dus: neemt α toe van 0° tot 90°, dan neemt $\tan\alpha$ toe van 0 tot ∞. Willen we de tangens van een hoek groter dan 90° weten, dan verlengen we het draaiende been in de richting van B naar 0 tot het verlengde de raaklijn snijdt in C (fig. 8,4). De afstand van het snijpunt C tot A is dan de waarde van de tangens van de gegeven hoek.

Indien de hoek in het eerste of derde kwadrant ligt, is de tangens van die hoek positief, aangezien het verlengde van het draaiende been in beide gevallen een lijnstuk van het positieve gedeelte van de raaklijn afsnijdt.

Ligt de hoek in het tweede of vierde kwadrant, dan snijdt het verlengde van het draaiende been in beide gevallen een negatief lijnstuk van de raaklijn af, dus is de tangens van een hoek in het tweede of vierde kwadrant gelegen negatief.

Een moeilijkheid is nog het gedrag van de tangens in de buurt van 90° en 270°.

Is α een weinig kleiner dan 90°, dan snijdt het verlengde van het draaiende been de raaklijn in een punt dat een zeer grote positieve waarde heeft. Dus $\tan\alpha$ gaat naar positief oneindig, hoe dichter de hoek α bij 90° komt.

Is α iets groter dan 90°, dan snijdt het verlengde van het draaiende been de raaklijn in een punt, dat een zeer grote negatieve waarde heeft.

Heeft dus α de waarde 90° overschreden, dan zien we plotseling de tangens uit min oneindig terugkomen. Vandaar dat men aan tan 90° zowel de waarde $+\infty$ als $-\infty$ kan toekennen.

Ditzelfde geldt voor tan 270°.

Oplossingen inzenden van de opgaven 39 t/m 45.

HILVERSUM

9,1. De sinusoïde

Er is nog een methode om het gedrag van de sinus tot uiting te brengen. Het aantal graden, dat $\angle\alpha$ bij het aangroeien van 0° tot 360° successievelijk kan verkrijgen, wordt achter elkaar uitgezet op een horizontale rechte (fig. 9,1).

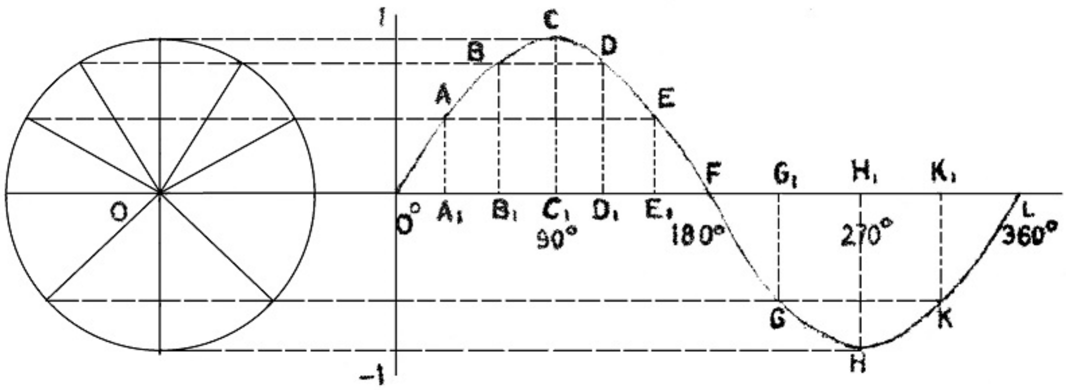


Fig. 9,1. De sinusoïde.

De eenheidscirkel is er ter verduidelijking nogmaals bijgevoegd.

In de linker figuur staan de waarden van de sinus gegeven voor verschillende hoeken. Deze waarden zijn in de rechter figuur ook uitgezet nl: AA', BB', CC' enz. Verbinden we de uiteinden van al deze lijnstukken, dan ontstaat de getekende kromme lijn, die sinusoïde heet.

Wil men de sinus weten, die bij een bepaalde hoek α behoort, dan richt men op de plaats, waar het aantal graden van de hoek staat aangegeven een loodlijn op. Deze loodlijn snijdt de sinusoïde in een punt. De lengte van deze loodlijn gerekend vanaf de horizontale lijn tot aan de sinusoïde is de waarde van de gezochte $\sin\alpha$.

We hebben reeds gezien dat α ook waarden aan kan nemen, die groter zijn dan 360° en wel tot oneindig toe. Nu denken we ons de sinusoïde van fig. 9,1 ook naar links doorlopend en komen zo op het begrip negatieve hoeken. Negatieve hoeken op zichzelf beschouwd, zijn niet bestaanbaar, echter wel de sinus of cosinus enz. van een negatieve hoek, dus $\sin(-\alpha)$; $\cos(-\alpha)$ enz.

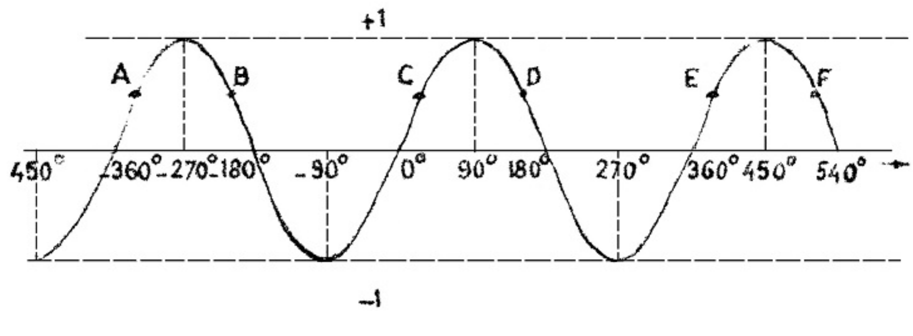


Fig. 9,2.

Het minteken heeft echter een andere betekenis dan in de algebra of rekenkunde. We hadden nl. een bepaalde draairichting als de positieve aangenomen. Er bestaat dus ook een negatieve draairichting, die tegengesteld gericht is aan de positieve. Het minteken nu, in de goniometrie gebruikt voor de hoek, heeft alleen betekenis om de draairichting aan te geven.

We kunnen dan nu de totale sinusoïde beschouwen, die zich uitstrekt van min-oneindig tot plus-oneindig. In fig. 9,2 is nog een willekeurige lijn getekend, evenwijdig aan de horizontale as .

Het blijkt, dat voor verschillende waarden van α, de sinuswaarden gelijk zijn. Zie de punten $A, B, C, D, E,$ en F. We kunnen dus nooit zeggen, wanneer we de waarden van $\sin\alpha$ weten, welke hoek er bij die waarde behoort, aangezien er oneindig veel waarden aan voldoen. We krijgen dan ook oneindig veel oplossingen.

9,2. De cosinusoïde

Evenals bij de sinus is behandeld gelden voor de cosinus eveneens de afspraken aangaande de negatieve hoeken en die van hoeken groter dan 360°.

In fig. 9,3 is de cosinusoïde getekend, die zich evenals de sinus uitstrekt van min-oneindig tot plus-oneindig. Uit deze figuur blijkt dat de cosinus niet groter dan $+1$ en niet kleiner dan -1 kan worden, dus hetzelfde als bij de sinus.

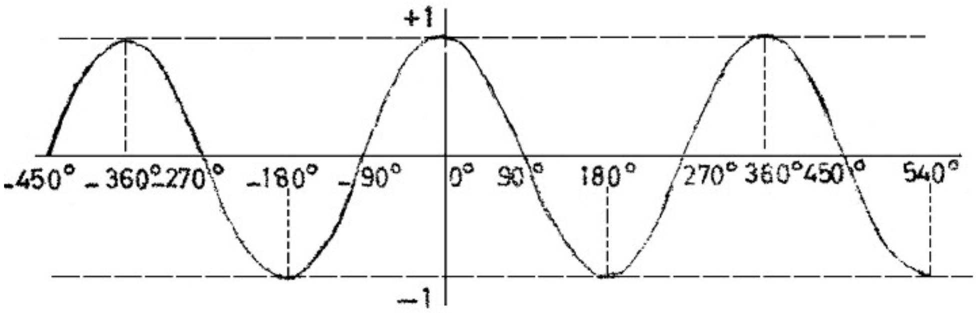


Fig. 9,3.

Indien we fig. 9,2 en fig. 9,3 met elkaar vergelijken, dan zien we dat de sinusoïde en de cosinusoïde volkomen hetzelfde zijn, alleen het beginpunt ligt anders. Wanneer in fig. 9,2 de verticale as over een afstand van 90° naar rechts verschoven wordt, dan gaat de sinusoïde over in de cosinusoïde.

Deze beide krommen worden in de techniek veel gebruikt om wisselstromen of wisselspanningen aan te geven.

Oplossingen inzenden van de opgaven 21 t/m 25.

10,1. Radialen

In de wisselstroomtheorie wordt van de sinusoïde en de cosinusoïde een veelvuldig gebruik gemaakt. Er wordt dan echter meestal niet gewerkt met het begrip hoeken, zoals in het voorgaande gedaan is. Om het een-en-ander te verduidelijken, zullen we dit onderwerp eveneens bij de vlakke meetkunde behandelen.

Een cirkelomtrek is te verdelen in 360 gelijke delen, booggraden genaamd. Zulk een booggraad is de lengte van een stukje van de cirkel (dus een gebogen lijnstukje) dat booglengte wordt genoemd.

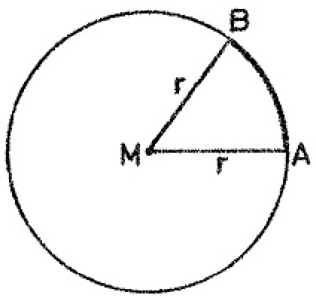


Fig. 10,1.

Een hoek waarvan het hoekpunt in het middelpunt van een cirkel ligt, heet een middelpuntshoek.
We kunnen nu een booggraad als volgt definiëren:
Een booggraad is de booglengte, behorende bij een middelpuntshoek van 1 graad.

Is nu de booglengte gelijk aan de straal van de cirkel (waarbij de straal dus gebogen gedacht moet worden), dan zeggen we dat de hoek een grootte heeft van 1 radiaal.

Dus als in fig. 10,1 $AB = r$, dan is: $\angle AMB = 1$ radiaal.

Definitie: Een radiaal is de grootte van een hoek, die als middelpuntshoek van een cirkel beschouwd, op een boog staat ter lengte van de straal van de cirkel.

Indien we gaan uitrekenen, hoeveel maal de straal van een cirkel op de halve omtrek gedeeld kan worden, blijkt het dat we een getal vinden met een onbepaald groot aantal decimalen.
Hoe ver we ook doorrekenen, nooit zal er een bepaalde regelmaat in die getallen optreden (dus het wordt geen repeterende breuk). Dit getal noemen we π (spreek uit Pi).
Het getal, gegeven met een aantal decimalen is $\pi = 3{,}1415926535\ldots\ldots$
Het is natuurlijk niet doenlijk om met zo'n getal te gaan rekenen, daarom gebruiken we voor π de waarde 3,14 of $\frac{22}{7}$ $\left(\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7} = 3{,}14\ldots\ldots\right)$.

Uit het voorgaande volgt, dat de gehele omtrek van een cirkel met straal r gegeven kan worden door:

Omtrek cirkel= $2\pi r$.

We komen nu tot de volgende conclusies:

Daar de omtrek van een cirkel 2π maal de straal is, bevat een hoek van 360° dus 2π radialen, waaruit blijkt, dat π radialen gelijk is aan 180°, zodat geldt:

$$1 \text{ radiaal} = \frac{180°}{\pi} = 57°17'45''.$$

Deze waarde is afgerond in seconden. We komen nu tot de volgende hoofdwaarden:

0° komt overeen met 0 radialen.

90° komt overeen met $\frac{\pi}{2}$ radialen.

180° komt overeen met π radialen.

270° komt overeen met $\frac{3}{2}\pi$ radialen.

360° komt overeen met 2π radialen.

Het woord radiaal wordt dikwijls weggelaten, er wordt dan kortweg gesproken over de hoek $\frac{1}{2}\pi$, π enz.

10,2. Hoeksnelheid of cirkelfrequentie

Denken we ons weer de cirkel met het draaiende been en laten we dit been met constante snelheid draaien ronddraaien, dan worden in gelijke tijdsdelen, gelijke hoeken doorlopen.
De hoek, die door het draaiende been per seconde wordt doorlopen, heet de hoeksnelheid of cirkelfrequentie, gewoonlijk aangeduid met de letter ω (spreek uit omega). De eenheid van ω is uitgedrukt in radialen per seconde (rad/sec). In 1 seconde wordt dus een hoek ω doorlopen, in 2 seconden een hoek van 2ω, in 3 seconden een hoek van 3ω, in t seconden een hoek $t\omega$ of zoals we liever zeggen een hoek ωt. Na één totale omwenteling heeft het draaiende been een hoek van 2π radialen doorlopen. Maakt nu het draaiende been in 1 seconde bv. 10 omwentelingen, dan is de doorlopen hoek gelijk aan $2\pi.10$ radialen. We kunnen nu algemeen zeggen: maakt het draaiende been f omwentelingen per seconde, dan is de doorlopen hoek gelijk aan $2\pi f$-radialen, dus dan is:

$$\omega = 2\pi f \ rad/sec.$$

Hieruit volgt dat de eenheid van f gelijk is aan $\frac{1}{sec}$.

We hebben gezien dat ω uitgedrukt wordt in rad/sec, waaruit volgt, dat ωt uitgedrukt wordt in radialen. We mogen dus, aangezien ωt blijkbaar een hoek voorstelt, onze goniometrische begrippen hierop toepassen en krijgen dan de uitdrukkingen $\sin \omega t$; $\cos \omega t$ enz. Draait nu het been met constante snelheid rond, dat wil zeggen ω is constant, dan is t de enige veranderlijke. De verschillende waarden voor t kunnen weer op de horizontale as uitgezet worden. Daar dan echter steeds de waarde voor ωt uitgerekend moet worden om de waarde van de bijbehorende goniometrische verhouding te bepalen, wordt meestal de gehele waarde ωt op de horizontale as afgezet (dus juist zoals we met de hoek α hebben gedaan).

We gaan nu nogmaals de sinusoïde zoals behandeld in les 9, fig. 9,2 bekijken. Hier is nl. steeds verondersteld dat het draaiende been, dus de lengte van de straal, gelijk aan 1 was. Dit is echter niet noodzakelijk, daar het draaiende been alle mogelijke waarden kan hebben. Nu is de maximale waarde die $\sin \alpha$ of $\sin \omega t$; $\cos \alpha$ of $\cos \omega t$ kan aannemen gelijk aan 1 en de minimale waarde is gelijk aan -1. Heeft nu het draaiende been een waarde die gelijk is aan 1, dan kunnen we de schaal, die gebruikt is in fig. 9,2 niet meer handhaven. Stellen we de lengte van het draaiende been op A, dan wordt de uitdrukking $A \sin \alpha$, $A \cos \alpha$ enz. Daar de sinus steeds ander waarden, gelegen tussen $+1$ en -1, aanneemt, zal de waarde van $A \sin \alpha$ en $A \cos \alpha$ veranderen tussen de grenzen van A en $-A$. Dus A is dan de maximale of minimale waarde. In de wisselstroomtheorie noemen we A de <u>amplitude</u> en $\sin \omega t$ of $\cos \omega t$ de <u>fase</u>, dat wil zeggen het gedeelte van A dat we op een bepaald tijdstip beschouwen. In de wisselstroomtheorie schrijven we bv. $U = \hat{U} \sin \omega t$ en $I = \hat{I} \sin \omega t$.
Hierin zijn $\hat{U}$ en $\hat{I}$ de maximale waarden of amplitudes. U en I zijn afhankelijk van de waarde van $\sin \omega t$, dus afhankelijk van <u>de tijd</u>. In fig. 10,2 is nogmaals een sinusoïde getekend, echter nu met een amplitude die groter is dan 1.

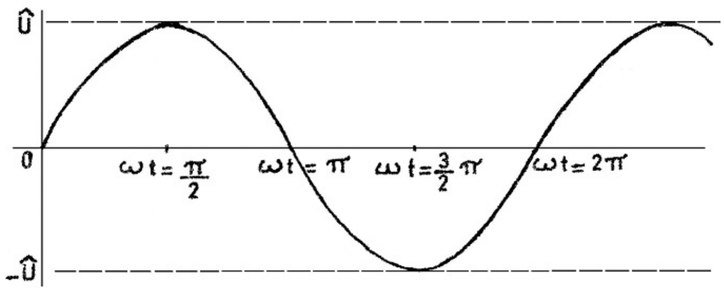


Fig. 10,2. $U = \hat{U} \sin \omega t$.

Oplossingen inzenden van de opgaven 51 t/m 55.

11,1. Vierhoeken

Bepaling: Een deel van een plat vlak, ingesloten door vier lijnen, die elkaar twee-aan-twee ontmoeten, heet een vierhoek.

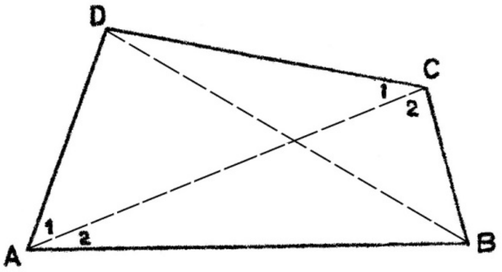


Fig. 11,1.

Een vierhoek heeft vier zijden, vier hoeken en vier hoekpunten. Een lijn, die twee niet op elkaar volgende hoekpunten verbindt, heet een diagonaal.
In fig. 11,1 zijn de diagonalen $AC\ en\ BD$ gestippeld getekend. Door bv. de diagonaal AC te trekken, verdelen we de vierhoek in twee driehoeken, nl. $\Delta\, ACD\ en\ \Delta\, ACB$.

Dan is: $\angle A_1 + \angle C_1 + \angle D = 180°$
$\underline{\angle A_2 + \angle C_2 + \angle B = 180°}$
Dus: $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 + \angle D + \angle B = 360°$
of $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

Hieruit volgt, dat in elke vierhoek de som van de hoeken 360° bedraagt.

11,2. Bijzondere soorten vierhoeken

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een ander paar evenwijdige lijnen, dan sluiten deze vier lijnen een vierhoek in, die parallellogram heet. Een parallellogram is een vierhoek, waarvan de zijden twee-aan-twee evenwijdig zijn. Elk paar evenwijdige zijden van een parallellogram heet overstaand en de hoeken door twee paar overstaande zijden gevormd, heten overstaande hoeken.

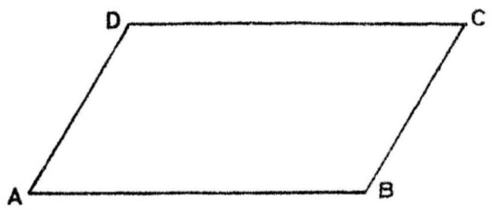


Fig. 11,2. Parallellogram.

Zijn van een parallellogram de vier zijden even groot, dan heet de gevormde figuur een ruit. Is één van de hoeken van een parallellogram recht (dus 90°), dan heet de figuur een rechthoek, is één van de hoeken van een ruit recht, dan heet de figuur een vierkant.
In fig. 11,3 zijn de genoemde figuren getekend.
Daar voor het examen Radiomonteur de behandeling Van de vierhoeken niet vereist is, gaan we op de eigenschappen der vierhoeken niet verder in.

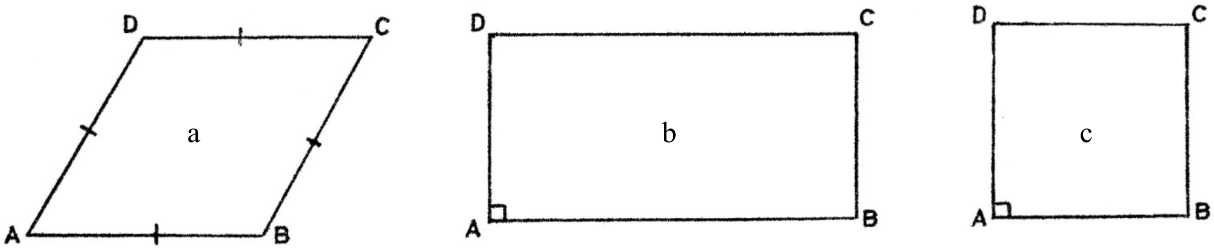


Fig. 11,3. a: ruit; b: rechthoek; c: vierkant.

11,3. Oppervlakken

Onder het oppervlak van een figuur verstaat men het gedeelte van het platte vlak dat door die figuur wordt begrensd. De grootte van het oppervlak wordt uitgedrukt door aan te geven, hoeveel maal een ander oppervlak op het eerste begrepen is. Voor dat andere oppervlak neemt men het vierkant, dat de eenheid van lengte tot zijde heeft. Men verkrijgt het oppervlak van een rechthoek door het aantal lengte-eenheden van de basis met het aantal lengte-eenheden van de hoogte te vermenigvuldigen.
In verband met de normalisatie der eenheden wordt hier als lengte-eenheid de meter genomen.
Het oppervlak is dan uitgedrukt in m^2 (spreek uit vierkante meter). We kunnen nu kortweg zeggen:
Het oppervlak van een rechthoek is gelijk aan het product van basis en hoogte.

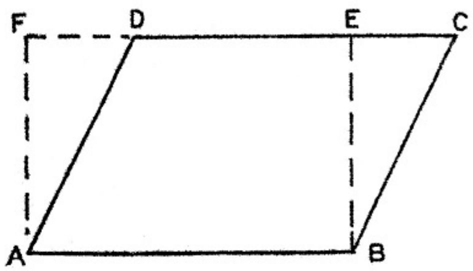


Fig. 11,4.

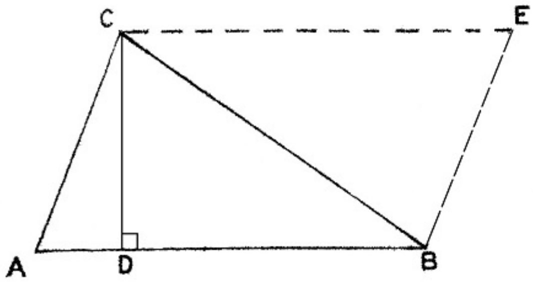


Fig. 11,5.

Voor een parallellogram geldt eveneens dat het oppervlak gelijk is aan basis maal hoogte.
Onder de hoogte verstaan we dan de afstand tussen twee der evenwijdige zijden (zie fig. 11,4).
$AB \times BF$ is het oppervlak van de rechthoek $ABEF$. $\Delta\, ADF$ en ΔBEC hebben gelijk oppervlak, dus is het oppervlak van $ABCD$ gelijk aan het oppervlak van de rechthoek.
Eigenschap: Het oppervlak van een driehoek is gelijk aan het halve product van basis en hoogte.

Gegeven: $\Delta\, ABC; CD \perp AB$. Te bewijzen: Oppervlak $\Delta\, ABC = ½\, AB \times CD$.
Bewijs: Trek $CE//AB$ en $BE//AC$, dan ontstaat het parallellogram $ABEC$, dat twee maal zo groot is als $\Delta\, ABC$. Het oppervlak van het parallellogram $ABEC$ is gelijk aan $AB \times CD$, dus is het oppervlak van $\Delta\, ABC = AB \times CD$. (fig. 11,5).

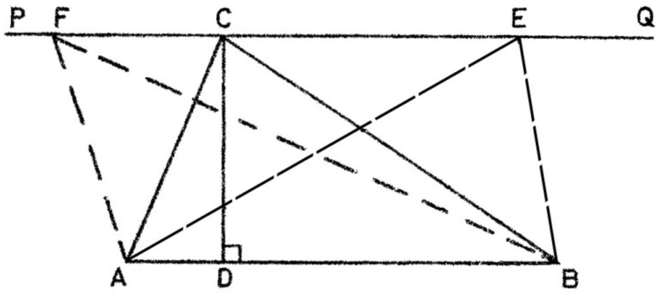


Fig. 11,6.

Uit bovenstaande eigenschap volgt dat twee driehoeken hetzelfde oppervlak hebben als hun basis en ook hun hoogten gelijk zijn.
Heeft men dus een driehoek ABC en trekt men door het toppunt C een lijn $PQ//AB$, dan zullen alle driehoeken die AB tot basis hebben en een punt van de lijn PQ tot top, hetzelfde oppervlak hebben als $\Delta\, ABC$.
Ter verduidelijking zijn in fig. 11,6 twee van zulke driehoeken nl: $\Delta\, ABE$ en $\Delta\, ABF$ getekend.

Oplossingen inzenden van de opgaven 56 t/m 61.

12,1. De stelling van Pythagoras

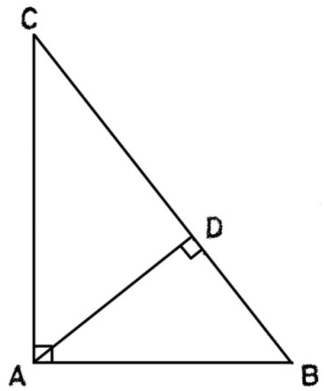


Fig. 12,1.

$\Delta\, ABC$ is rechthoekig in $A. AD$ is de hoogtelijn op de hypotenusa. Beschouwen we nu $\Delta\, ABD$, dan zien we dat $\angle A = \angle D = 90°$. (fig.12,1).
Nu is in $\Delta\, ABD, \angle B = 90° - \angle BAD$ en in $\Delta\, ABC$ is $\angle B = 90° - \angle C$, dus is $\angle C = \angle BAD$ en aangezien $\angle B$ zowel in $\Delta\, ABC$ als in $\Delta\, ABD$ voorkomt, volgt hieruit dat de hoeken van beide driehoeken aan elkaar gelijk zijn. We zeggen dan dat de driehoeken dezelfde vorm hebben, ofwel gelijkvormig zijn. Indien twee figuren dezelfde vorm hebben, dan is eenvoudig in te zien dat we de elementen van een der figuren met eenzelfde bedrag kunnen vermenigvuldigen om de andere figuur te verkrijgen. Anders uitgedrukt:
Indien twee figuren gelijkvormig zijn, dan vormen de zijden een evenredigheid. Uit de gelijkvormigheid van $\Delta\, ABC\ en\ \Delta\, ABD$ volgt dan, dat:
$\frac{DB}{AB} = \frac{AB}{BC}$ of $AB^2 = BD \times BC.$

Zo kunnen we voor $\Delta\, ADC$ op dezelfde wijze aantonen dat $AC^2 = CD \times BC.$
Tellen we dit nu bij elkaar op, dan vinden we dat $AB^2 + AC^2 = BD \times BC + CD \times BC$ $= BC^2$ of: $AB^2 + AC^2 = (BD + CD) \times BC = BC \times BC = BC^2$, dus: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
In woorden: In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de hypotenusa.

Deze zeer belangrijke stelling is bekend onder de naam: "de stelling van Pythagoras".

12,2. De stelling van Pythagoras in de goniometrie

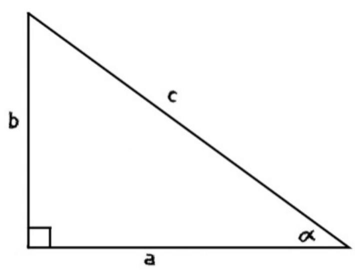


Fig. 12,2

Uit de stelling van Pythagoras volgt dat

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Nu is $\sin\alpha = \frac{b}{c}$ en $\cos\alpha = \frac{a}{c}$. Delen we in de vergelijking $a^2 + b^2 = c^2$ beide leden door c^2, dan vinden we: $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ of: $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Hierin vullen we $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ in en vinden dan:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (zie les 6, Vl. M.)

12,3. Enige formules die de cursist uit het hoofd dient te leren

Wederom in verband met de eisen, die door het Nederlands Radio Genootschap (N.R.G.) ten aanzien van het examen Radiomonteur gesteld worden, zullen we nu een aantal formules vermelden die niet alle afgeleid of bewezen zullen worden.

a. Oppervlak van een cirkel $= \pi r^2$.
b. Oppervlak van een cilinder $= 2\pi rh + 2\pi r^2$.

Om het oppervlak van een cilinder te bepalen, snijden we de cilindermantel door langs de lijn AB en rollen deze mantel uit. Het oppervlak van de gevormde rechthoek is $2\pi r.h$, want de basis is juist de omtrek van de cirkel.

Tellen we hier het oppervlak en het bovenvlak en het grondvlak bij op nl: $\pi r^2 + \pi r^2$, dan vinden we voor het totale oppervlak van de cilinder, dus het oppervlak van de cilindermantel plus oppervlak van bovenvlak en grondvlak: oppervlak cilinder is $2\pi rh + 2\pi r^2$.

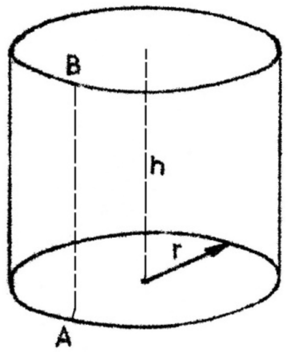


Fig. 12,3. Cilinder

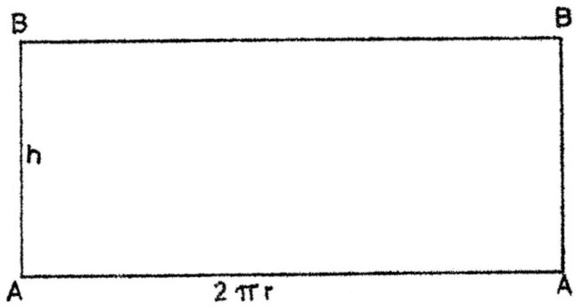


Fig. 12,4. Cilindermantel uitgerold.

c. De inhoud van een cilinder wordt gevonden uit het product grondvlak maal hoogte, dus: inhoud van een cilinder $= \pi r^2 h$.

d. Oppervlakte van een bol is $4\pi r^2$. Dit is alleen aan te tonen met behulp van de hogere wiskunde (Differentiaal en Integraalrekening), evenals de inhoud van een bol.

e. Inhoud van een bol $= \frac{4}{3}\pi r^3$.

Opmerking: Men dient er goed op te letten, dat het oppervlak altijd een kwadratische waarde aangeeft, ook wat de eenheid aangaat, dus het oppervlak is uitgedrukt in m^2.

De inhoud is altijd uitgedrukt in kubieke waarde, dat wil zeggen, tot een derde macht, dus de inhoud is uitgedrukt in m^3 (spreek uit kubieke meters).

Voorbeeld: Wat is het oppervlak en de inhoud van een cilinder, waarvan de hoogte 10 cm is en de straal van het grondvlak 7 cm?
Oplossing: We berekenen eerst het oppervlak van het grondvlak.

Dit is een cirkel, dus het oppervlak is: $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times 49 = 154\ cm^2$.
Omtrek grondvlak is $2\pi r = \frac{22}{7} \times 7 = 44\ cm^2$.

Dus het oppervlak van de cilindermantel bedraagt $44 \times 10 = 440\ cm^2$.
Het totale oppervlak is dus $(440 + 308) cm^2 = 748\ cm^2$.
De inhoud bedraagt $\pi r^2 h = 154 \times 10 = 1540\ cm^3$.

Oplossingen inzenden van de opgaven 62 t/m 65.

HILVERSUM

13,1 Definitie van een prisma

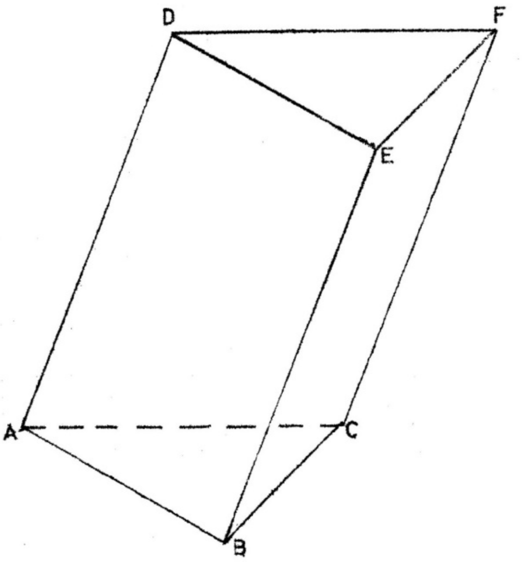


Fig. 13,1. Prisma.

Een lichaam dat begrensd wordt door drie of meer vlakken, een waarvan de snijlijnen evenwijdig lopen en door twee evenwijdige vlakken, die de eerstgenoemde vlakken alle snijden, heet een prisma. Naar gelang het grondvlak een driehoek, een vierhoek, een vijfhoek . . . of een n-hoek is, noemt men het prisma een driezijdig, vierzijdig, vijfzijdig . . . of n-zijdig prisma.
De zijvlakken van een prisma zijn parallellogrammen. Moet men dus het oppervlak van een prisma bepalen, dan gaat men de som der oppervlakken der zijvlakken bepalen, die zijn immers alle parallellogrammen. Daarbij wordt dan de som van grondvlak en bovenvlak, die even groot zijn, opgeteld.

Is het boven- en grondvlak een veelhoek, groter dan een vierhoek, dan bepalen we het oppervlak daarvan door diagonalen te trekken en daardoor de veelhoek in driehoeken te verdelen.

Inhoud van een prisma.

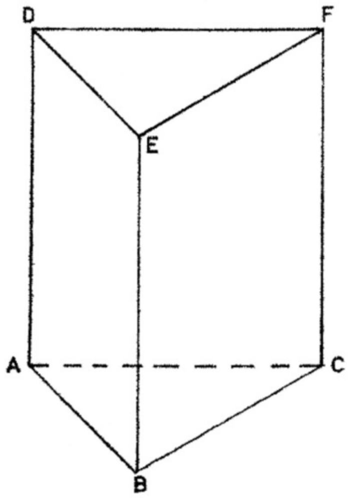


Fig. 13,2. Driezijdig recht prisma.

De inhoudsbepaling van een prisma is zeer lastig bij een prisma zoals in fig. 13,1 getekend is, daar de zijvlakken een hoek maken met het grondvlak. We zullen ons daarom bepalen tot die prisma's waar de zijvlakken een rechte hoek maken met het grondvlak. Zo'n prisma noemen we een "recht prisma".

De inhoud wordt dan gegeven door het oppervlak van het grondvlak maal de hoogte van het prisma.

13,2. Nogmaals het oppervlak van een driehoek

Met behulp van de goniometrie is het mogelijk om het oppervlak van een driehoek op een andere wijze uit te drukken.

Uit het voorgaande volgt dat:
opp. $\Delta\, ABC = ½\, AB \times CD$.

Nu is $\sin\alpha = \frac{CD}{AC}$, dus: $CD = AC \sin\alpha$.

Vullen we dit in, dan vinden we dat:
opp. $\Delta\, ABC = ½\, AB \times AC \times \sin\alpha$.

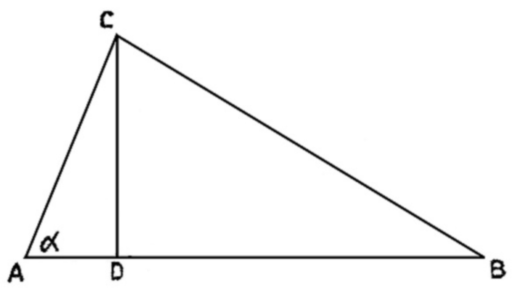


Fig. 13,3.

In woorden: Het oppervlak van een driehoek is gelijk aan het product van twee zijden maal de sinus van de ingesloten hoek.

Voorbeeld: Gegeven: $AB = 10cm;\ AC\ 8cm;$ en $\alpha = 30°$. (fig.13,3).
Gevraagd: Oppervlak van $\Delta\ ABC$.
Oplossing: Opp. $\Delta\ ABC =$
$= ½ \times 10 \times 8 \times \sin 30° =$
$= ½ \times 10 \times 8 \times ½ = 20\ cm^2$.

Er is nog een formule om het oppervlak van een driehoek aan te geven. Deze formule zullen we niet afleiden, doch alleen vermelden.

$$Opp.\Delta\ ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Hierin is s de halve omtrek van de driehoek, dus: $s = (AB + AC + BC)$.

Voorbeeld:
Gegeven: $AB = 26\ cm; AC = 28\ cm$ en $BC = 30\ cm$.
Gevraagd: Opp. $\Delta\ ABC$.
Oplossing: $s = (26 + 28 + 30) = 42$.

$$\text{Opp. } \Delta\ ABC = \sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)} =$$
$$= \sqrt{42 \times 16 \times 14 \times 12} = \sqrt{2.3.7.2^4.2.7.2^2.3} =$$
$$= \sqrt{2^8.3^2.7^2} = 2^4.3.7 = 336\ cm^2.$$

Opgave: Stel, dat in het rechte prisma van fig. 13,2 de hoek $DEF = 90°$ en $\angle\ DFE = 30°$. Verder is $DF = 10\ cm; BE = 20\ cm$.

Gevraagd wordt het oppervlak en de inhoud van het prisma te berekenen.

Oplossing: $\Delta\ DEF$ is een rechthoekige driehoek met een hoek van 30° erin.
Volgens de stelling: In een rechthoekige driehoek met een hoek van 30° is de kleinste rechthoekszijde gelijk aan de helft van de hypotenusa. Hieruit volgt, dat: $DE = ½\ DF = ½ \times 10 = 5\ cm$.

Volgens de stelling van Pythagoras is $DF^2 = ED^2 + EF^2$ of $10^2 = 5^2 + EF^2$.
Hieruit volgt, dat: $EF^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$, dus: $EF = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.
Nu is het oppervlak van rechthoek $ABED$ gelijk aan $5 \times 20 = 100\ cm^2$, van vierhoek $BCFE$, $5\sqrt{3} \times 20 = 100\sqrt{3}\ cm^2$ en van vierhoek $ACFD$, $10 \times 20 = 200\ cm^2$.
Verder is het oppervlak van $\Delta\ DEF$ gelijk aan $½ \times DE \times EF = ½ \times 5 \times 10 = 25\ cm^2$.
Het oppervlak van $\Delta\ ABC$ is eveneens $25\ cm^2$. Het totale oppervlak van het prisma is nu:
$\left(100 + 100\sqrt{3} + 200 + 25 + 25\right) cm^2 = \left(350 + 100\sqrt{3}\right) cm^2$.

De inhoud van het prisma vinden we uit het product van de oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte, dus de inhoud is $25 \times 20 = 500\ cm^3$.Het oppervlak van de driehoek DEF had ook berekend kunnen worden met de andere formules, doch alle zijden moeten uitgerekend worden om de oppervlakken van de zijvlakken te kunnen berekenen.

De vlakke meetkunde voor de opleiding Radiomonteur is hiermee beëindigd*[1].
Voor de opleiding Radiotechnicus wordt de leerstof nog verder behandeld.

Oplossingen inzenden van de opgaven 66 t/m 71.

*[1] Rens gaat hiermee voorbij aan de lessen m.b.t. de " Grondconstructies" blz. 39 die ook tot de examenstof Radiomonteur behoren.

R.T.
Vl. M.

14,1. Congruentie van driehoeken

Twee driehoeken die zo geplaatst kunnen worden dat ze elkaar volkomen bedekken heten congruent of gelijk en gelijkvormig. Dit geven we aan met het teken $\cong$ en schrijven dan bv. $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$ (drie-hoek ABC is congruent met driekoek DEF).
De zijden, hoeken en hoekpunten die bij het samenvallen van de congruente driehoeken elkaar bedekken heten gelijkstandige zijden, hoeken en hoekpunten. Bij de schrijfwijze $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$ is de volgorde der letters belangrijk. De volgorde geeft nl. aan dat $A\ en\ D; B\ en\ E; C\ en\ F$ gelijkstandig zijn. Er zijn vijf gevallen waarin we mogen besluiten dat twee driehoeken congruent zijn.
Deze vijf gevallen dienen uit het hoofd geleerd te worden.

1e congruentiegeval. Twee driehoeken zijn congruent als zij één zijde en de beide aanliggende hoeken gelijk hebben.
Gegeven: $AB = DE;\ \angle A = \angle D;\ \angle B = \angle E.$
Te bewijzen: $\Delta\, ABC \cong \Delta DEF.$

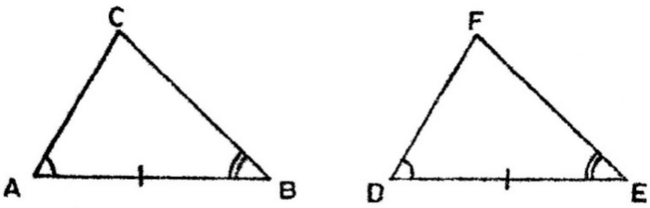


Fig. 14,1

Opmerking: In figuur 14,1 zien we de gelijke zijden en de gelijke hoeken op dezelfde wijze aangegeven.
Dit zullen we in het vervolg altijd aanhouden.

Bewijs: We denken ons $\Delta\, DEF$ uitge-knipt opgenomen en zo op $\Delta\, ABC$ gelegd dat DE precies samenvalt met AB, dus het punt D in A en het punt E in B.
Omdat $\angle D = \angle A$ en $\angle E = \angle B$ valt DF langs AC en EF langs BC. De zijden van beide driehoeken vallen dus samen, zodat zij elkaar volkomen bedekken en dus congruent zijn.

2e congruentiegeval. Twee driehoeken zijn congruent, als zij één zijde, een aanliggende en de over-staande hoek gelijk hebben.

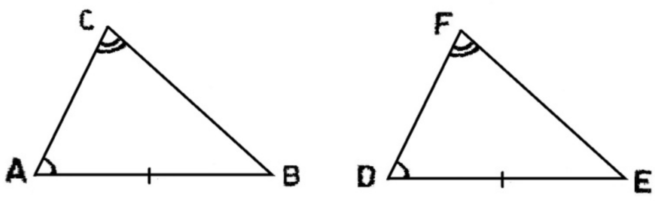


Fig. 14,2.

Gegeven: $AB = DE$
$\angle A = \angle D$
$\angle C = \angle F$
Te bewijzen: $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF.$

Bewijs: De som van de hoeken van een driehoek zijn samen 180°.
We kunnen dus zeggen:
$\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F.$
Uit de gegevens:
$\angle A = \angle D$ en $\angle C = \angle F$, volgt: $\angle A + \angle C = \angle D + \angle F$. Daar de som van twee hoeken van de drie-hoeken gelijk zijn, hebben de driehoeken dus ook het derde paar hoeken gelijk, dus: $\angle B = \angle E$.
De twee driehoeken hebben nu één zijde en de beide aanliggende hoeken gelijk en zijn dus congruent volgens het eerste geval.

<u>3^e Congruentiegeval.</u> Twee driehoeken zijn congruent als zij twee zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben.

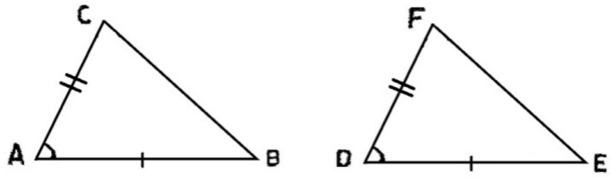


Fig. 14,3.

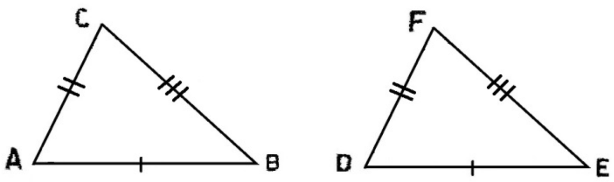
Gegeven: $AB = DE$
$AC = DF$
$\angle A = \angle D$

Te bewijzen: $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$

Bewijs: Dit bewijs is evenals bij het eerste congruentiegeval niet meetkundig te geven. We knippen daarom $\Delta\, DEF$ uit en plaatsen die zo op $\Delta\, ABC$ dat het hoekpunt D op het hoekpunt A komt en DE langs AB. Het punt E valt nu samen met het punt B, daar DE en AB even lang zijn en omdat $\angle D = \angle A$, zullen DF en AC elkaar ook bedekken. Nu is gegeven dat $DF = AC$, dus valt het punt F samen met het punt C. Maar dan valt ook EF langs BC, zodat de driehoeken elkaar volkomen bedekken. De driehoeken zijn dus congruent.

4^e Congruentiegeval.

Twee driehoeken zijn congruent als zij de zijden twee-aan-twee gelijk hebben.



Gegeven: $AB = DE$
$AC = DF$
$BC = EF$

Fig. 14,4.

Te bewijzen: $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$

Bewijs: Daar er in dit geval niets is gegeven over de hoeken zullen we de driehoeken nu niet op elkaar plaatsen, doch met twee gelijkstandige zijden tegen elkaar en wel zodanig dat D met A samenvalt. (fig. 14,5). We trekken de CF (gestippeld, daar het een hulplijn is).

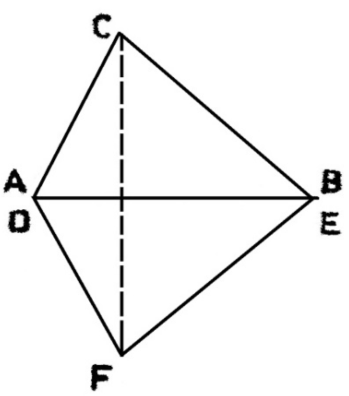


Fig. 14,5.

Hierdoor ontstaan er twee gelijkbenige driehoeken nl. $\Delta\, CFB$ en $\Delta\, CFA$.

Nu is bekend dat bij gelijkbenige driehoeken twee hoeken, gelegen aan de gelijke zijden gelijk zijn, dus:

In $\Delta\, CFB$ is $\angle BCF = \angle BFC$
In $\Delta\, CFA$ is $\underline{\angle ACF = \angle AFC}$ opgeteld
$\angle ACB = \angle DFE$

De driehoeken ABC en DEF hebben dan twee zijden gelijk nl. $AF = AC$ en $BF = BC$ en de ingesloten hoek nl. $\angle ACB = \angle DEF$ en zijn dus congruent volgens het 3^e congruentiegeval.

Oplossingen inzenden van de opgaven 72 t/m 75

15,1. Vervolg congruentie van driehoeken

5^e^ congruentiegeval.

Twee driehoeken zijn congruent als zij twee zijden en de hoek tegenover één van die zijden gelijk hebben, mits de hoek tegenover de andere zijde van dezelfde soort is.

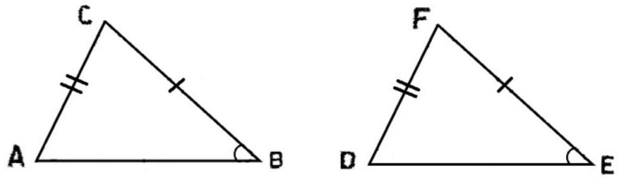


Fig. 15,1.

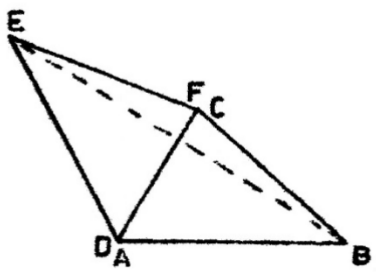


Fig. 15,2.

Gegeven: $AC = DF$
$BC = EF$
$\angle B = \angle E$

$\angle A$ en $\angle D$ zijn beide scherp.

Te bewijzen: $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$.
Bewijs: We plaatsen de driehoeken weer met twee gelijkstandige zijden tegen elkaar nl. met de zijden AC en DF (zie fig. 15,2). Dus de zijden tegenover de gelijke hoeken zijn tegen elkaar geplaatst.
We trekken de hulplijn BE.
Daar $BC = FE$ is $\Delta\, BEC$ gelijkbenig.
De basishoeken van deze driehoek zijn dus gelijk: $\angle\, CEB = \angle\, CBE$.
Daar $\angle B = \angle E$ (gegeven) volgt hieruit dat $\angle\, DEB = \angle DBE$
Dus is $\Delta\, ABE$ ook gelijkbenig zodat $AB = DE$. De gegeven driehoeken ABC en DEF zijn dus congruent, want ze hebben de drie zijden gelijk (zie 4^e^ congruentiegeval).

In het 5^e^ geval vermeldden we: "mits de hoeken tegenover de andere zijde van dezelfde soort zijn", d.w.z. ze moeten beide scherp, recht of stomp zijn. Bij de gegevens stond daarom $\angle A$ en $\angle D$ zijn beide scherp. Indien we deze beperking niet opnemen dan zouden er twee driehoeken mogelijk zijn, met $AC = DF$, $BC = EF$ en $\angle B = \angle E$. (uitgezonderd als $\angle A$ en $\angle D$ recht zijn, maar dan zijn ze immers driehoeken van dezelfde soort).
We kunnen een-en-ander het beste met een figuur verduidelijken (zie fig. 15,3).

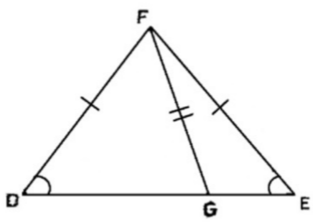


Fig. 15,3.

Gegeven: $\Delta\, DEF$ is gelijkbenig; $DF = EF$, dus: $\angle D = \angle E$.
De driehoeken DFG en GFE hebben de zijde FG gemeenschappelijk. De driehoeken zouden dan congruent zijn, want zij hebben twee zijden gelijk nl. $DF = EF$ en $FG = FG$ en de hoek tegenover een dier zijden nl. $\angle D = \angle E$. We zien echter duidelijk dat de driehoeken <u>niet</u> congruent zijn daar DG niet gelijk is aan GE en verder zijn $\angle DGF$ en $\angle FGE$ elkaars supplement, de een scherp, de ander stomp

Uit de 5 congruentiegevallen blijkt dat twee driehoeken congruent zijn als zij drie paar onafhankelijke elementen gelijk hebben. Het woord 'onafhankelijk' heeft hier een bijzondere betekenis. Wanneer we zeggen dat twee driehoeken de drie hoeken gelijk hebben, dan is dit geen onafhankelijk gegeven, daar we geleerd hebben dat de som van de hoeken van een driehoek samen 180° is.

Is dus gegeven dat twee paar hoeken gelijk zijn, dan is automatisch het derde paar ook gelijk. Er dient dus steeds minstens een paar zijden gelijk te zijn, willen we de congruentie kunnen aantonen. Verder zijn alle combinaties mogelijk.

15,2. Congruentie van gelijkbenige en van rechthoekige driehoeken

Bij gelijkbenige driehoeken volgt uit de gelijkheid van een paar hoeken, hetzij een der basishoeken of de tophoeken, de gelijkheid van de andere hoeken. Daarom is het bij gelijkbenige driekoeken voldoende indien twee paar onafhankelijke elementen gegeven zijn.
Rechthoekige driehoeken hebben de rechte hoek gelijk, zodat ook bij deze driehoeken kan worden volstaan met twee paar gelijke elementen.

15,3. Toepassing van de congruentie van driehoeken

Is van twee driehoeken gegeven, dat ze drie elementen gelijk hebben en moeten we daaruit de congruentie aantonen, dan trachten we tot een der vijf genoemde congruentiegevallen te komen. Wanneer de gelijkheid van twee lijnen of van twee hoeken moet worden aangetoond, trachten we de driehoeken te vinden, waarin deze lijnen of hoeken gelijkstandige zijden of hoeken zijn en waarvan we de congruentie kunnen aantonen door het vraagstuk tot een der vijf congruentiegevallen terug te brengen. We willen dit met enkele voorbeelden toelichten.

Voorbeeld 1. Twee driehoeken zijn congruent als zij twee zijden gelijk hebben, alsmede de zwaartelijnen naar een paar dezer gelijke zijden.

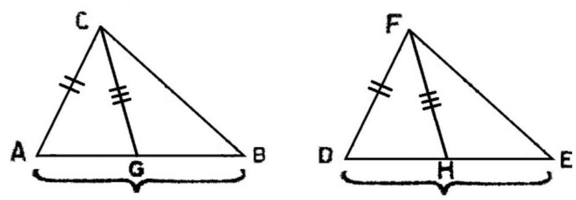


Fig. 15,4.

Gegeven: $AB = DE$; $DH = HE$;
$AC = DF$; $CG = FH$;
$AG = GB$.
(fig. 15,4)
Te bewijzen: $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$.

Bewijs: Door de lijnen CG en FH worden de driehoeken in twee delen verdeeld. In de linker delen komen de meeste gegeven gelijke elementen voor. Daarom beginnen we met te trachten , de congruentie van de driehoeken AGC en DFH aan te tonen.

Daar $AB = DE$, $AG = ½\, AB$ en $DH = ½\, DE$, is $AG = DH$. De driehoeken AGC en DFH hebben dus de 3 zijden gelijk; ze zijn dus congruent. Hieruit volgt: $\angle A = \angle D$.
De driehoeken ABC en DEF hebben nu twee zijden en de ingesloten hoek gelijk en zijn dus congruent.

Oplossingen inzenden van de opgaven 76 t/m 80.

R.T.
Vl. M.

Vlakke Meetkunde. Les 16 31

HILVERSUM

16,1. Vierhoeken

In les 11 van de vlakke meetkunde is reeds even gesproken over de vierhoeken en zijn de begrippen parallellogram, ruit, rechthoek en vierkant gedefinieerd.
We gaan nu de genoemde vierhoeken aan een nadere beschouwing onderwerpen.

16,2. Parallellogram

Een parallellogram is een vierhoek waarvan de zijden twee-aan-twee evenwijdig zijn. (fig. 16,1). Elk paar evenwijdige lijnen noemen we overstaande zijden, de hoeken A en C zijn overstaande hoeken evenals de hoeken B en D.

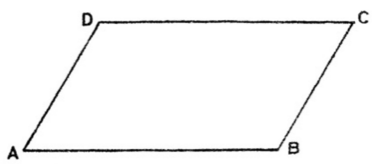


Fig. 16,1.

Eigenschap 1. De som van twee hoeken, aan eenzelfde zijde gelegen is 180°.
Deze eigenschap volgt zonder meer uit de theorie van twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde.

Eigenschap 2. In een parallellogram zijn de overstaande hoeken gelijk.
Gegeven: $AB//CD$; $BC//AD$.
Te bewijzen: $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$.
Bewijs: $\angle A + \angle B = 180°$ (volgens eigenschap 1);
evenzo is: $\angle A + \angle D = 180°$. De hoeken $B \; en \; D$ hebben dus hetzelfde supplement, nl. $\angle A$, en zijn daarom gelijk.
Op overeenkomstige wijze blijkt $\angle A = \angle C$.

Opmerking: Is van een parallellogram een hoek scherp, dan heeft dit parallellogram twee scherpe- en twee stompe hoeken. We noemen het dan een scheefhoekig parallellogram.
Is van een parallellogram een hoek recht, dan zijn de andere hoeken ook recht. We noemen het dan een rechthoekig parallellogram of rechthoek.

Eigenschap 3. In een parallellogram zijn de overstaande zijden even groot.

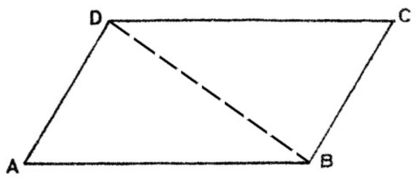


Fig. 16,2

Gegeven: $AB//CD$; $BC//AD$ (fig. 16,2).
Te bewijzen: $AB = CD$; $AD = BC$.
Bewijs: We trekken de diagonaal BD.
In de driehoeken ABD en CBD is $\angle ABD = \angle CDB$. (verwisselende binnenhoeken bij twee evenwijdige lijnen); evenzo is $\angle ADB = \angle CBD$. Verder hebben deze driehoeken de zijde BD gemeen. Ze hebben dus één zijde en de beide aanliggende hoeken gelijk en zijn dus congruent.
Hieruit volgt: $AB = CD \; en \; AD = BC$.

Opmerking: Is van een parallellogram een zijde gelijk aan de aanliggende zijde, dan zijn alle vier zijden even lang. We noemen het parallellogram dan een ruit. Een parallellogram, waarvan de zijden gelijk en de hoeken recht zijn, heet een vierkant.

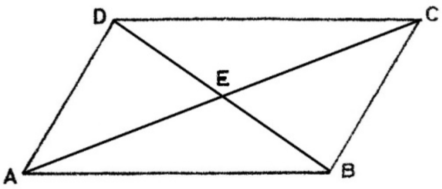


Fig.16,3.

Eigenschap 4. De diagonalen van een parallellogram delen elkaar middendoor.
Gegeven: $AB//CD$; $BC//AD$ (fig. 16,3).
Te bewijzen: $AE = EC$; $BE = ED$.
Bewijs: We beschouwen de driehoeken ABE en CDE. In deze driehoeken is $AB = CD$ (volgens eigenschap 3); $\angle DCE = \angle BAE$ en $\angle CDE = \angle ABE$ (verwisselende binnenhoeken bij twee evenwijdige lijnen). De driehoeken ABE en CDE hebben dus één zijde en de beide aanliggende hoeken gelijk; ze zijn dus congruent.
Hieruit volgt: $AE = EC$ en $BE = ED$.

16,3. Rechthoek en ruit

Eigenschap 1. In een rechthoek zijn de diagonalen even groot.

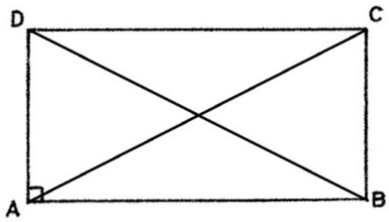


Fig. 16,4.

Gegeven: $ABCD$ is een rechthoek
Te bewijzen: $AC = BD$ (fig. 16,4)
Bewijs: De driehoeken ABD en BAC hebben gelijk: de rechte hoek en de verticale rechthoekszijde; bovendien hebben ze de rechthoekszijde AB gemeen. De driehoeken hebben dus gelijk: twee zijden en de ingesloten hoek.
Ze zijn derhalve congruent. Daaruit volgt: $AC = BD$.

Eigenschap 2. In een ruit staan de diagonalen loodrecht op elkaar en delen de hoeken middendoor.
Gegeven: $ABCD$ (fig. 16,5) is een ruit.
Te bewijzen: $AC \perp BD$; $\angle BAE = \angle DAE$.
Bewijs: In $\Delta\, ABD$ is $AB = AD$; de driehoek is dus gelijkbenig. Een ruit is een bijzonder soort parallellogram, dus alle eigenschappen van een parallellogram gelden ook voor een ruit; daarom is $DE = BE$ (zie 16,2, eigenschap 4).
De lijn AE is dus de zwaartelijn uit de top in de gelijkbenige driehoek ABD. In een gelijkbenige driehoek vallen de drie merkwaardige lijnen, uit de top naar de basis getrokken, samen. (van $\Delta\, ABD$ is BD de basis en A de top.
De zwaartelijn AE is dus tevens bissectrix*[2] en hoogtelijn, dus: $\angle DAE = \angle BAE$ en $AE \perp BD$.

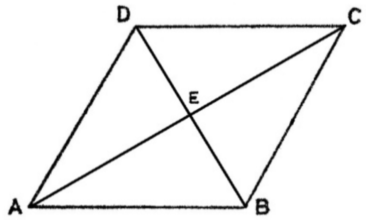


Fig. 16,5.

Opmerking: Een vierkant is een parallellogram met gelijke zijden en rechte hoeken. Alle eigenschappen van een parallellogram, een rechthoek en een ruit zijn dus ook eigenschappen van een vierkant.

Oplossingen inzenden van de opgaven 81 t/m 85.

*[2] Synoniem met het woord 'bissectrice'. Waarom Rens hier de uitdrukking 'bissectrix' invoert, is niet duidelijk. Prisma 'Vreemde woordenboek' schrijft het volgende: **bissec'trix** [F *bissectrice,* v. L bi- = twee-, en *secáre, sectum* = snijden (vlg. Ned. zagen); de uitgang *–trix* is vr. vorm van *–tor,* dat de bedrijver aangeeft: hier vr. wegens *linea* = lijn] lett.: lijn die in tweeën snijdt (nl. een hoek); lijn die een hoek middendoor deelt. (FV)

17,1. Eigenschappen, waaruit volgt dat een vierhoek een parallellogram is

Een vierhoek is een parallellogram, als de zijden twee-aan-twee evenwijdig zijn. Dit is het hoofdkenmerk van een parallellogram. Er zijn echter nog enige andere kenmerken, waaruit men kan besluiten dat een vierkant een parallellogram is.

Eigenschap 1. Een vierhoek is een parallellogram als de overstaande hoeken gelijk zijn.

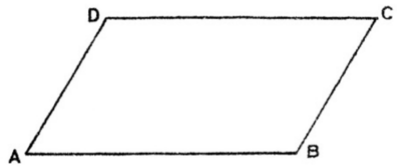


Fig. 17,1.

Gegeven: $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$ (fig. 17,1).
Te bewijzen: $ABCD$ is een parallellogram.
Bewijs: Van een vierhoek is de som van de hoeken 360°. Daar $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$ kunnen we hiervoor ook schrijven:
$2\angle A + 2\angle B = 360°$ dus: $\angle A + \angle B = 180°$.
Deze beide hoeken zijn binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn bij de lijnen AD en BC, gesneden door AB.
Daar ze samen 180° zijn, is $AD//BC$.
Uit $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ en $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$ volgt ook:
$2\angle A + 2\angle D = 360°$, dus $\angle A + \angle D = 180°$. Hieruit volgt op overeenkomstige wijze dat $AB//CD$.
Van de vierhoek $ABCD$ zijn de zijden twee-aan-twee evenwijdig; het is dus een parallellogram.
Gevolg: Een vierhoek is een rechthoek, als alle hoeken gelijk zijn.

Eigenschap 2. Een vierhoek is een parallellogram, als de overstaande zijden gelijk zijn.

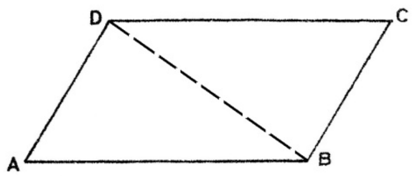


Fig.17,2.

Gegeven: $AB = DC$; $AD = BC$ (fig. 17,2).
Te bewijzen: $ABCD$ is een parallellogram.
Bewijs: We trekken de diagonaal BD. Er ontstaan daarbij twee driehoeken, ABD en CDB die de zijden gelijk hebben. Ze zijn dus congruent. Hieruit volgt:
$\angle ABD = \angle CDB$, dus: $DC//AB$. Ook is $\angle ADB = \angle CBD$, dus: $BC//AD$. De zijden van de vierhoek $ABCD$ zijn dus twee-aan-twee evenwijdig; derhalve is $ABCD$ een parallellogram.
Gevolg: een vierhoek is een ruit, als alle zijden gelijk zijn.

Eigenschap 3. Een vierhoek is een parallellogram als de diagonalen elkaar middendoor delen.

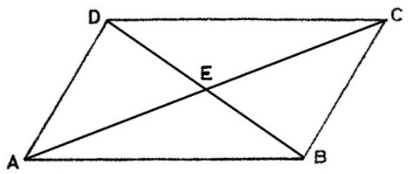


Fig. 17,3.

Gegeven: $AE = EC$; $BE = ED$ (fig. 17,3).
Te bewijzen: $ABCD$ is een parallellogram.
Bewijs: In de driehoeken ABE en CDE is $AE = EC$ en $BE = ED$. Bovendien is $\angle AEB = \angle CED$ (overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen). De driehoeken ABE en CDE hebben dus twee zijden en de ingesloten hoek gelijk. Ze zijn dus congruent. Hieruit volgt: $\angle DCE = \angle BAE$, dus: $DC//AB$.

Op overeenkomstige wijze tonen we aan dat de driehoeken AED en CEB congruent zijn, waaruit volgt: $CB//DA$.
De zijden van de vierhoek zijn dus twee-aan-twee evenwijdig, zodat de vierhoek een parallellogram is.

R.T.

34 Vl. M Nadruk verboden

Eigenschap 4. Een vierhoek is een parallellogram, als twee zijden gelijk en evenwijdig zijn.

Onderstelde: $AB = DC$; $AB//DC$. (fig. 17,2).
Gestelde: $ABCD$ is een parallellogram.
Bewijs: We trekken de diagonaal BD. Daar $DC//AB$ is $\angle ABD = \angle CDB$.
De driehoeken ABD en CDB hebben dus twee zijden en de ingesloten hoek gelijk; ze zijn dus congruent. Hieruit volgt: $\angle CBD = \angle ADB$. Dit zijn verwisselende binnenhoeken bij de snijding van AD en BC door de lijn BD, dus $AD//BC$. De zijden van de vierhoek zijn dus twee-aan-twee evenwijdig; dit is dus een parallellogram.

Samenvatting van de eigenschappen der vierhoeken.

1. Van de parallellogrammen:
   In een parallellogram zijn de overstaande hoeken gelijk; de overstaande zijden gelijk; delen de diagonalen elkaar middendoor.
2. Van de rechthoeken:
   In een rechthoek zijn de diagonalen gelijk.
3. Van de ruiten:
   In een ruit staan de diagonalen loodrecht op elkaar en delen de hoeken middendoor.

Omgekeerde eigenschappen.

Een vierhoek is een parallellogram als:
1. de overstaande hoeken gelijk zijn.
2. de overstaande zijden gelijk zijn
3. de diagonalen elkaar middendoor delen.
4. twee zijden gelijk en evenwijdig zijn.

Een parallellogram is een rechthoek als de diagonalen gelijk zijn.
Een parallellogram is een ruit als:
1. de diagonalen loodrecht op elkaar staan.
2. de diagonalen de hoeken middendoor delen.

Voorbeeld: in driehoek ABC is D het midden van AC; E het midden van BC.
Verleng DE met een stuk $EF = DE$.

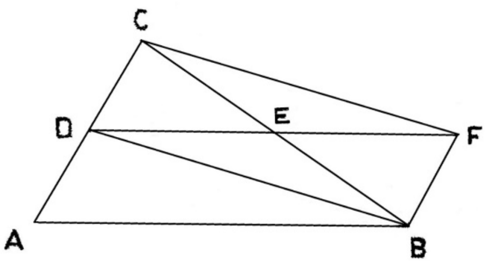


Fig. 17,4.

1^e. Bewijs dat vierhoek $DBFC$ een parallellogram is.
Bewijs: $DE = EF$ en $BE = EC$, de diagonalen delen elkaar middendoor, waaruit volgt dat vierhoek $DBFC$ een parallellogram is.
2^e. Bewijs dat $ABFD$ een parallellogram is.
Bewijs: Bewezen is dat vierhoek $DBFC$ een parallellogram is, waaruit volgt dat $BF//DC$ dus ook $BF//AD$ en verder dat $BF = DC$, maar $DC = AD$ dus $BF = AD$. In vierhoek $ABFD$ is BF gelijk en evenwijdig AD, dus is vierhoek $ABDF$ een parallellogram.
Gevraagd: Welk verband bestaat er tussen DE en AB?
Oplossing: Daar $ABFD$ een parallellogram is, is $AB = DF$. Nu is $DE = EF$, waaruit volgt $DE = ½AB$.

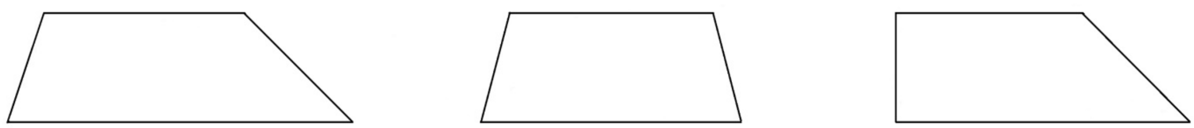
Oplossingen inzenden van de opgaven 86 t/m 90.

18,1 Trapezium

Definities.

Een trapezium is een vierhoek waarvan slechts twee zijden evenwijdig lopen. De langste van de twee evenwijdige zijden heet de basis, de niet evenwijdige zijden de benen of de opstaande zijden en de afstand van de evenwijdige zijden de hoogte van het trapezium.

Zijn de opstaande zijden gelijk, dan heet het trapezium gelijkbenig; zijn de opstaande zijden ongelijk, dan heet het ongelijkbenig. Staat een der benen loodrecht op de evenwijdige zijden, dan heet het trapezium rechthoekig (fig. 18,1).



a **b** **c**

Fig.18,1. a: ongelijkbenig trapezium; b: gelijkbenig trapezium; c: rechthoekig trapezium.

Eigenschappen.

Eigenschap 1. In een gelijkbenig trapezium zijn de hoeken aan de basis gelijk.

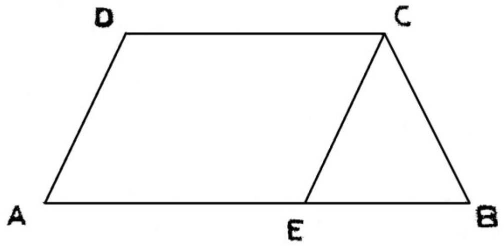


Fig. 18,2.

Gegeven: $AB//DC$; $AD = BC$ (fig. 18,2).
Te bewijzen: $\angle A = \angle B$.
Bewijs: We trekken $CE//DA$. Nu is $AECD$ een parallellogram (twee paar evenwijdige zijden) en is $\Delta\, EBC$ gelijkbenig ($CE = DA$ en $CB = DA$, dus: $CE = CB$). In de gelijkbenige Driehoek is $\angle B = \angle CEB$ en $\angle CEB = \angle A$ (overeenkomstige hoeken), dus $\angle A = \angle B$.
Gevolg: In een gelijkbenig trapezium zijn de hoeken aan de kleinere evenwijdige zijde eveneens gelijk.

Eigenschap 2. In een ongelijkbenig trapezium zijn de hoeken aan de basis ongelijk, de grootste hoek ligt aan de kleinere opstaande zijde.

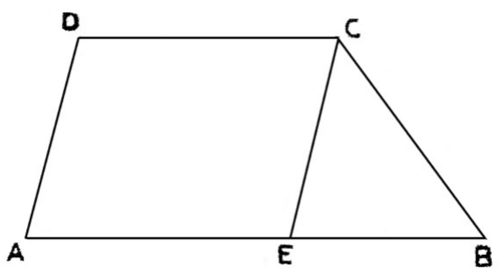


Fig. 18,3.

Gegeven: $AB//DC$; $BC > AD$ (fig. 18,3).
Te bewijzen: $\angle A > \angle B$.
Bewijs: We trekken $CE//DA$. Nu is $AECD$ een parallellogram (twee paar evenwijdige zijden). $EC = AD$, dus $BC > EC$. In $\Delta\, EBC$ ligt tegenover de grotere zijde een grotere hoek, dus $\angle CEB > \angle B$. Maar $\angle CEB = \angle A$ (overeenkomstige hoeken), dus: $\angle A > \angle B$.

<u>Eigenschap 3.</u> In een gelijkbenig trapezium zijn de diagonalen gelijk.

<u>Gegeven</u>: $DC//AB$, $AD = BC$ (fig. 18,4).
<u>Te bewijzen:</u> $AC = BD$.
<u>Bewijs</u>: We bewijzen dat de driehoeken ABD en ABC congruent zijn. Ze hebben AB gemeen; $AD = BC$; $\angle DAB = \angle CBA$. De driehoeken hebben dus twee zijden en de ingesloten hoek gelijk; ze zijn dus congruent. De derde zijde hebben ze dus ook gelijk, derhalve is: $AC = BD$.

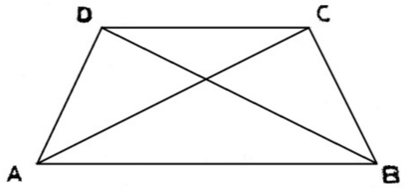


Fig. 18,4.

<u>Eigenschap 4.</u> Als in een trapezium de diagonalen gelijk zijn, is het gelijkbenig.

<u>Gegeven:</u> $AB//DC$; $AC = BC$ (fig. 18,5).
<u>Te bewijzen:</u> $AD = BC$
Bewijs: We maken een driehoek, waar de gegeven diagonalen als zijden voorkomen.
Daartoe trekken we $CE//DB$. Dan is $BECD$ een parallellogram (twee paar evenwijdige zijden).
Hierbij is $EC = BD = AC$.
$\Delta\, ACE$ is dus gelijkbenig, dus $\angle E = \angle BAC$.
Maar ook is $\angle ABD = \angle E$ (overeenkomstige hoeken).
Daaruit volgt: $\angle ABD = \angle BAC$. De driehoeken ABD en BAC hebben de zijde AB gemeen, $AC = BD$, terwijl de ingesloten hoeken CAB en DBA gelijk zijn.
Deze driehoeken zijn dus congruent.
Daaruit volgt: $AD = BC$.

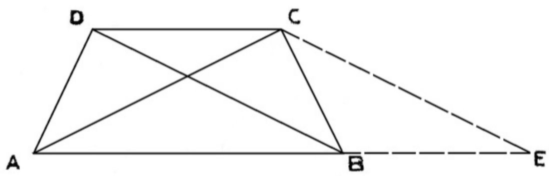


Fig. 18,5.

We zullen het hoofdstuk der vierhoeken afsluiten door een opgave over deze stof uit te werken
<u>Opgave:</u> Uit een punt P gelegen op de basis van een gelijkbenige driehoek trekt men lijnen evenwijdig aan de benen tot zij deze snijden. Bewijs dat de som van deze lijnen gelijk is aan een been.

<u>Gegeven:</u> $AC = BC$; $PD//BC$; $PE//AC$ (fig. 18,6).
<u>Te bewijzen:</u> $PD + PE = AC$ (of $= BC$).
<u>Bewijs:</u> Daar $AC = BC$ is $\angle A = \angle B$. De lijn PD loopt evenwijdig aan BC dus $\angle B = \angle APD$, maar dan is ook $\angle A = \angle APD$, waaruit volgt dat $\Delta\, APD$ gelijkbenig is, dus: $AD = PD$.
Daar $PD//BC$ en $PE//AC$ is de vierhoek $DPEC$ een parallellogram, waaruit volgt dat $PE = CD$.
We kunnen na optelling zeggen dat:
$AD + DC = PD + PE$ maar $AD + DC = AC$, dus:
$AC = PD + PE$, hetgeen we moesten bewijzen.

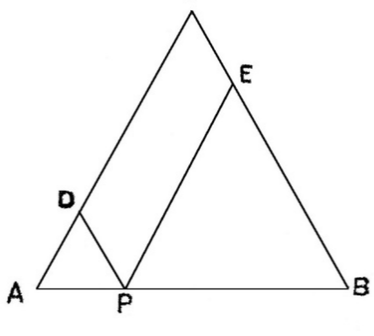


Fig. 18,6.

Oplossingen inzenden van de opgaven 91 t/m 95.
Volgende week de oplossingen inzenden van de opgaven 96 t/m 100.

Veelhoeken

19,1. Veelhoeken en diagonalen

Een deel van een plat vlak, ingesloten door meer dan drie rechte lijnen, heet veelhoek. Naar het aantal zijden spreekt men van vierhoeken, vijfhoeken, zeshoeken, enz.; in het algemeen van n-hoeken.

Een veelhoek heeft evenveel hoekpunten als hoeken en als zijden.

De lijnen, die twee niet-aanliggende hoekpunten verbindt, heten diagonalen. Trekt men in een veelhoek (fig. 19,1) alle diagonalen vanuit één hoekpunt A, dan kan men geen diagonaal trekken naar het hoekpunt A zelf en ook niet naar de beide aanliggende hoekpunten. Het aantal diagonalen is dus 3 minder dan het aantal hoekpunten. Het aantal diagonalen dat in een n-hoek vanuit één hoekpunt kan worden getrokken is dus $n-3$. Zou men op deze wijze vanuit ieder hoekpunt $n-3$ diagonalen trekken, dan verkrijgt men iedere diagonaal tweemaal. De diagonaal AD komt voor onder de diagonalen vanuit het hoekpunt A, maar ook onder de diagonalen vanuit het hoekpunt D. Het totale aantal diagonalen dat men in een n-hoek kan trekken bedraagt dus:

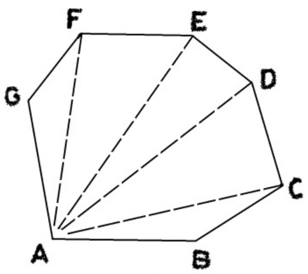


Fig. 19,1.

$$\tfrac{1}{2}\,n(n-3)$$

19,2. Verdeling van een veelhoek in driehoeken.

Trekt men in een veelhoek uit één hoekpunt alle diagonalen, dan wordt de veelhoek in driehoeken verdeeld (fig. 19,1). Links van iedere diagonaal ligt één driehoek. Rechts van de meest rechtse diagonaal ligt echter ook nog een driehoek. Het aantal driehoeken is dus één meer dan het aantal diagonalen, dus $n-2$.

De hoeken van deze driehoeken vormen samen de hoeken van de veelhoek.
De som van de hoeken van een n-hoek is dus $(n-2)\times 180°$.

19,3. Eigenschappen van veelhoeken

Eigenschap 1. Eén zijde van een veelhoek is kleiner dan de som van de andere zijden.

Gegeven: $ABCDEFG$ is een willekeurige veelhoek (fig. 19,1).
Te bewijzen: $AB < BC + CD + DE + EF + FG + GA$.
Bewijs: We trekken uit het hoekpunt A alle $n-3$ diagonalen. In iedere driehoek is één zijde kleiner dan de som der beide andere zijden. We hebben nu:

in $\Delta\, ABC: AB < BC + CA$
in $\Delta\, ACD: AC < CD + DA$
in $\Delta\, ADE: AD < DE + EA$
in $\Delta\, AEF: AE < EF + FA$
in $\underline{\Delta\, AFG: AF < FG + GA}$ opgeteld

$$AB + AC + AD + AE + AF < BC + CD + DE + EF + FG + CA + DA + EA + FA + GA$$
$$\underline{AC + AD + AE + AF = CA + DA + AE + FA}$$
(aftrekken)
$$AB < BC + CD + DE + EF + FG + GA$$

19,4. Congruentie van veelhoeken

We noemen twee veelhoeken congruent, als ze zo geplaatst kunnen worden dat ze elkaar volkomen bedekken.

De zijden, hoeken en diagonalen, die bij het samenvallen van congruente veelhoeken elkaar volkomen bedekken, heten gelijkstandige zijden, hoeken en diagonalen. Gelijkstandige zijden, hoeken en diagonalen van congruente veelhoeken zijn gelijk. Zijn twee veelhoeken congruent, dan is dit ook het geval met de driehoeken, waarin zij door gelijkstandige diagonalen kunnen worden verdeeld, terwijl de congruente driehoeken in beide veelhoeken op dezelfde wijze aan elkaar sluiten.
Ook het omgekeerde hiervan is waar. Zijn de driehoeken, waarin twee veelhoeken door de diagonalen uit een hoekpunt verdeeld kunnen worden twee-aan-twee congruent, terwijl die congruente driehoeken in beide veelhoeken op dezelfde wijze aan elkaar sluiten, dan zijn ook de veelhoeken congruent.
Om de congruentie van veelhoeken te bewijzen, is het dus slechts nodig, de congruentie te bewijzen van de driehoeken, waaruit de veelhoeken zijn samengesteld. Als voorbeeld bewijzen we de volgende eigenschappen.

Eigenschap 1. Twee parallellogrammen zijn congruent, als zij één zijde en de diagonalen gelijk hebben.

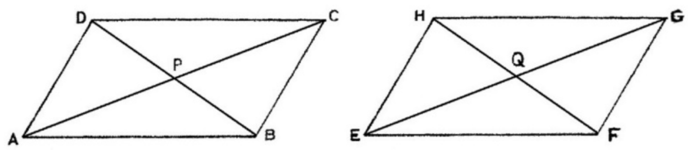


Fig. 19,2.

Gegeven: $ABCD$ en $EFGH$ zijn parallellogrammen; $AB = EF$; $BD = FH$ (fig. 19,2),
Te bewijzen: $ABCD \cong EFGH$.
Bewijs: Omdat in een parallellogram de diagonalen elkaar middendoor delen en de diagonalen in de gegeven parallellogrammen twee-aan-twee gelijk zijn, zijn de helften van de diagonalen ook gelijk: $AP = EQ$ en $BP = FQ$. De driehoeken ABP en EFQ hebben de drie zijden gelijk en zijn dus congruent. Hieruit volgt: $\angle CAB = \angle GEF$.
De driehoeken $ABC\ en\ EFG$ hebben twee zijden en de ingesloten hoek gelijk en zijn dus congruent. Eveneens is $\Delta\, ACD \cong \Delta\, EGH$. De diagonalen AC en EG verdelen de parallellogrammen in twee driehoeken, die twee-aan-twee congruent zijn en op dezelfde wijze aan elkaar sluiten. De parallellogrammen zijn dus congruent.

Eigenschap 2. Twee trapeziums zijn congruent, als zij de vier zijden gelijk hebben.

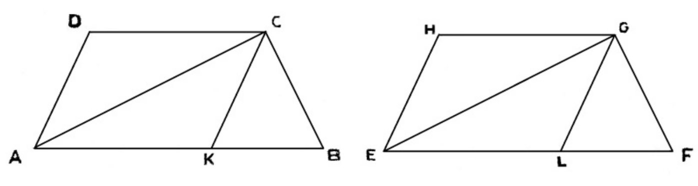


Fig. 19,3.

Gegeven: $AB//DC$; $EF//HG$; $AB = EF; BC = FG; CD = GH$; $DA = HE$ (fig. 19,3).
Te bewijzen: $ABCD \cong EFGH$.
Bewijs: We verdelen de trapeziums door de diagonalen AC en EG in twee driehoeken.
We bewijzen nu $\Delta\, ABC \cong \Delta EFG$ en $\Delta\, ACD \cong EGH$. We trekken nu $CK//DA$ en $GL//HE$. De vierhoeken $AKCD$ en $ELGH$ zijn parallellogrammen. Hieruit volgt: $CK = DA$ en $GL = HE$, en daar $DA = HE$, is ook $CK = GL$. Eveneens blijkt: $AK = EL$ en daar $AB = EF$, is ook $KB = LF$. De driehoeken KBC en LFG hebben de drie zijden gelijk en zijn dus congruent. Hieruit volgt: $\angle B = \angle F$. Daar $AB = EF$ en $BC = FG$, hebben de driehoeken ABC en EFG twee zijden en de ingesloten hoek gelijk; ze zijn dus congruent. Daaruit volgt: $AC = EG$. De driehoeken ACD en EGH hebben dus de drie zijden gelijk en zijn daarom congruent. De diagonalen AC en EG verdelen de trapeziums dus in driehoeken, die twee-aan-twee congruent zijn en op dezelfde wijze aan elkaar sluiten; de trapeziums zijn daarom congruent.

Oplossingen inzenden van de opgaven 101 t/m 107.

Voor deel 2 ga naar:

https://www.fonsvendrik.nl/educatief/rens-rens/vlakke-meetkunde