HOGERE EN MIDDELBARE TECHNISCHE SCHOOL VOOR ELEKTRONICA

BERGWEG 33
HILVERSUM

Directie Rens en Rens
Gevestigd sinds 1925

TELEFOON 47474
GIRO 86580

R.T.

Goniometrie. Les 23 Nadruk verboden 45

Tafels

1.1. Inleiding

Met behulp van de hogere wiskunde is het mogelijk de goniometrische verhoudingen van een willekeurige scherpe hoek met iedere gewenste nauwkeurigheid te bepalen. Deze gevonden waarden zijn meestal onmeetbare getallen; zij worden afgerond tot op een bepaald aantal decimalen. Hoeveel decimalen er bepaald moeten worden is afhankelijk van de vereiste nauwkeurigheid. Noemen we als voorbeeld het gebruik van de waarden op laboratoria of bij precisiewerk, dan zal men meer decimalen eisen dan in de praktijk, waar men meestal met een of hoogstens twee decimalen genoegen neemt.

De waarden van de goniometrische verhoudingen van de scherpe hoek zijn verzameld in tabellen, die goniometrische tafels of ook wel kortweg sinustafels worden genoemd.

Deze tafels zijn meestal opgenomen in zogenaamde logaritmentafels.

Naar het aantal decimalen waarin deze tafels zijn uitgevoerd onderscheiden we vier-, vijf- en zesdecimalige tafels, die ruimschoots aan ons doel beantwoorden.

Van deze tafels zijn verschillende soorten verkrijgbaar. In de diverse soorten tafels wordt meestal de voor die tafel benodigde werkwijze voor in de tafel aangegeven.

Daar we natuurlijk in deze cursus niet iedere voorkomende tafel kunnen behandelen zullen we ons beperken tot “Noordhoff’s Schooltafel*[1]”.

Heeft men een andere tafel tot zijn beschikking, dan dient men er op te letten dat hierin voorkomen:

1e. de gewone of Briggse Logaritmen.
2e. logaritmen de goniometrische functies, opklimmend met 1 minuut.
3e. directe waarden der goniometrische functies, eveneens opklimmend met 1 minuut.

Het is natuurlijk niet de bedoeling dat de cursist te dwingen Noordhoff’s Schooltafel aan te schaffen, daar uiteraard de uitkomsten van iedere 5-decimalige tafel hetzelfde zijn. Iedere cursist dient echter een logaritmentafel, meestal kortweg “log-tafel” genoemd, te bezitten om de opgaven te kunnen maken.

Verder zal men bij vele vakken, o.a. mechanica, algebra, techniek enz. dikwijls bij de opgaven de tafel nodig hebben.

Het verdient aanbeveling, indien men een andere tafel gebruikt heeft als de genoemde tafel, dit bij de in te zenden correcties te vermelden.

Bij de opgaven, die met antwoorden gegeven zijn, zullen we de antwoorden zowel vier- als vijfdecimalig geven.

23.2. De goniometrische tafels

Indien we van de hoeken van 0° tot en met 45° de goniometrische verhoudingen kennen, dan kennen we ze ook van de hoeken van 45° tot 90°.

Immers $\sin\alpha = (90° - \alpha), \cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ enz. De sinustafels zijn zo ingedeeld, dat men om een goniometrische verhouding van een hoek op te zoeken, die kleiner is dan 45°, boven aan de pagina moet kijken en voor een hoek gelegen tussen 45° en 90° onder aan de pagina.

We zullen dit bekijken door een gedeelte van een pagina uit de tafel over te nemen.

We nemen de bladzijden waarboven staat 23° en 24° en nemen de tabel geldende voor 24° gedeeltelijk over.

*[1] Een logaritmetafel wordt thans niet meer gebruikt; was tot circa 1980 een veelgebruikt hulpmiddel bij berekeningen, voordat er hulpmiddelen zoals rekenmachines en later spreadsheets ter beschikking kwamen. (bron: Wikipedia) FV

24°

M	sin	cos	tan	cot	
0	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	60
1	700	343	558	4428	59
2	727	331	593	4252	58
3	753	319	627	4077	57
4	780	307	662	3902	56
5	806	295	697	3727	55
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
56	0,42156	0,90680	0,46489	2,15104	4
57	183	668	525	4940	3
58	209	655	560	4777	2
59	235	643	595	4614	1
60	0,42262	0,90631	0,46631	2.14451	0
	cos	sin	cot	tan	M

65°

Boven de tabel staat de hoek aangegeven. In de tabel onder M staan de minuten vermeld. We kunnen dus aflezen, dat $\sin 24°0' = 0{,}40674;\ \sin 24°1' = 0{,}40700;\ \sin 24°2' = 0{,}40727$ enz. We zien dus, dat alleen de laatste drie decimalen zijn opgeschreven. In de ruimte die voor deze decimalen staat, dienen we dus de decimalen te denken die hoger genoemd zijn. In de tafel kunnen we verder aflezen $\sin 24°33' = 0{,}41549;\ \sin 24°58' = 0{,}42209$.

De tweede tabel geeft de cosinuswaarden aan, de derde de waarde van de tangens enz. Rechts onderaan de tabel zien de hoek 65° staan. We dienen te bedenken, dat van boven gelezen wordt $24°60'$ en van onderen $65°0'$. Zo is $\cos 24°60' = 0{,}90631$ en $\sin 65°0' = 0{,}90631$, dus $\cos 24°60' = \sin 65°0'$, hetgeen klopt. (Rechts onderaan weer de M van minuten.)

Nemen we nog als voorbeeld $\sin 24°39' = 0{,}41707$ en $\cos 65°21' = 0{,}41707$. Dus $\sin 24°39' = \cos 65°21'$. Dit klopt natuurlijk daar $90° - 24°39' = 65°21'$ en omgekeerd: $90°° - 65°21' = 24°39'$.

De goniotafel loopt dus slechts tot $24°60'$ en gaat dan vanaf $65°0'$ weer terug. We maken de cursist erop attent, dat vele opzoekfouten worden gemaakt, doordat men de hoek onderaan de pagina opzoekt en dan bv. de minuten links afleest in plaats van rechts, of bovenaan de pagina de goniometrische verhouding afleest i.p.v. onder aan.

We zullen nu nog enige waarden van diverse goniometrische verhoudingen geven, waarbij het nuttig is, dat de cursist controleert of hij op dezelfde waarden uitkomt.

$\sin 15°32'$	=	0,26780	$\tan 25°$	=	0,46631
$\cos 23°27'$	=	0,91741	$\sin 87°59'$	=	0,99938
$\tan 83°35'$	=	8,89185	$\cos 63°30'$	=	0,44620
$\cot 12°47'$	=	4,40745	$\tan 45°45'$	=	1,02653
$\cos 5°3'$	=	0,99612	$\cot 72°23'$	=	0,31754

Ter oefening maken de opgaven 210 t/m 214.
Oplossingen inzenden van de opgaven 215 t/m 219.

24.1. Tafels (vervolg)

In de vorige les hebben we geleerd de goniometrische verhoudingen van hoeken op te zoeken die in graden en minuten gegeven zijn. In deze les zullen we het opzoeken behandelen van goniometrische verhoudingen van hoeken die ook in seconden gegeven zijn. Dit heeft alleen zin als men een vijfdecimalige tafel gebruikt.

Bekijken we nogmaals de pagina uit de vorige les, dan zien we dat:

$$\sin 24^\circ \; = 0{,}040674$$
$$\sin 24^\circ 1' = 0{,}40700.$$

Het verschil tussen $\sin 24^\circ 1'$ en $\sin 24^\circ$ is dus $0{,}40700 - 0{,}40674 = 0{,}00026$.

Bedenken we verder dat het verschil tussen 24° en $24^\circ 1'$ gelijk is aan 1 minuut of 60 seconden, dan kunnen we dus voor een gegeven aantal seconden uitrekenen welk bedrag dit vertegenwoordigt.

Nemen we een algemeen voorbeeld:

Stel we hebben a seconden gegeven, dan is in bovengenoemd geval dat bij $\sin 24^\circ$ moet worden opgeteld:

$$\frac{a}{60} \times 0{,}00026.$$

Bij de bewerking schrijven we al deze nullen nooit op, doch schrijven $\frac{a}{60} \times 26$. We dienen er echter goed op te letten dat het dan gevonden getal bij de laatste decimalen gerekend moet worden.

Verder wijzen we erop, dat we bij de berekening $\frac{a}{60} \times 26$ geen decimalen bijvoegen.

De uitkomst wordt dus altijd afgerond, d.w.z. is het eerste getal achter de komma, 4 of kleiner, dan laten we dit getal zonder meer weg. Is het eerste getal achter de komma 5 of groter, dan wordt het getal voor de komma met 1 verhoogd.

Bepalen we bv. $\sin 24^\circ 0' 23''$.

Voor het aantal seconden moet dus bijgeteld worden $\frac{23}{60} \times 26 = 9{,}9$. We nemen dus het getal 10.

We vinden:

$$\begin{array}{rcr} \sin 24^\circ 0' & = & 0{,}40674 \\ 23'' & = & \underline{\qquad 10} \; + \\ \sin 24^\circ 0' 23'' & = & 0{,}40684 \end{array}$$

Nemen we nog een voorbeeld op dezelfde pagina:

Bepaal $\sin 24^\circ 3' 32''$.

We vinden voor $\sin 24^\circ 3' = 0{,}40753$.

Het verschil tussen $\sin 24^\circ 3'$ en $\sin 24^\circ 4'$ is 27.10^{-5}. Om nu de waarde voor $32''$ te vinden krijgen we $\frac{32}{60} \times 27.10^{-5} = 14{,}4.10^{-5}$ en nemen 14.10^{-5}. Het getal 14 wordt bij de laatste decimalen van $\sin 24^\circ 3'$ opgeteld.

Schematisch werken we als volgt:

$$\begin{array}{rcr} \sin 24^\circ 3' & = & 0{,}40753 \\ 32'' \text{ geeft } \frac{32}{60} \times 27 & = & \underline{\qquad 14} \; + \\ \sin 24^\circ 3' 32'' & = & 0{,}40767 \end{array}$$

De bewerking, waarbij we uitrekenen, welke waarden het aantal seconden vertegenwoordigen, heet interpoleren (tussenvoegen).

Beschouwen we nog eens het verloop van $\sin \alpha$, als α aangroeit van 0° tot 90°, dan weten we dat $\sin \alpha$ aangroeit van 0 tot 1. Bij het interpoleren voor een sinus van een hoek zullen we dus het interpolatiegetal bij de waarde van de sinus optellen.

De waarden voor $\cos\alpha$ echter nemen af van 1 tot 0, als de hoek toeneemt van 0° tot 90°. Bij het interpoleren voor cosinuswaarden moeten we het interpolatiegetal dus aftrekken.

Zo vinden we voor de tangens ook optellen en voor de cotangens aftrekken.
Vatten we dit samen dan vinden we:

Bij het interpoleren van seconden bij de sinus en de tangens tellen we het bedrag, dat het aantal seconden vertegenwoordigt op; bij de cosinus en de cotangens trekken we het bedrag af.

24,2. Terugzoeken

We hebben nu behandeld hoe bij een gegeven hoek de goniometrische verhouding van die hoek opgezocht kan worden. Thans rest ons nog de behandeling van het zogenaamde terugzoeken.

Hierbij moet dus de hoek opgezocht worden, waarvan de goniometrische verhouding gegeven is. We zullen dit aan de hand van enige voorbeelden laten zien. De werkwijze is juist tegengesteld aan die van het opzoeken.

Voorbeeld 1: Bepaal α als gegeven is dat $\sin\alpha = 0{,}37254$.
Oplossing: We zoeken dus in de tafel onder de kolom onder de sinus naar het getal 0,37254.
We vinden voor $\sin 21°52'$ het getal 0,37245, terwijl we vinden voor $\sin 21°53'$ het getal 0,37272. De waarde 0,37254 ligt hier dus tussen, zodat de gezochte hoek α gelegen moet zijn tussen $21°52'$ en $21°53'$. Het verschil tussen $\sin 21°53'$ en $\sin 21°52'$ bedraagt $0{,}37272 - 0{,}37245 = 0{,}00027$, terwijl $\sin\alpha - \sin 21°52' = 0{,}37254 - 0{,}37245 = 0{,}00009$.

Dit verschil is dus het $\frac{0{,}00009}{0{,}00027} = \frac{1}{3}$ gedeelte van het totale verschil.
Daar het verschil tussen $21°53'$ en $21°52'$ juist 1 minuut of 60 seconden bedraagt, vinden we voor het aantal seconden $\frac{1}{3} \times 60'' = 20''$. De gevraagde hoek α is dan $21°52'20''$.

Voorbeeld 2: Bepaal α als $\cos\alpha = 0{,}40347$.
Oplossing: In de tafel vinden we dat:

$$\left.\begin{array}{l}\cos 66°11' = 0{,}40381\\ \cos 66°12' = 0{,}40355\end{array}\right\}\ \text{het verschil is } 0{,}00026.$$

$\cos 66°11' - \cos\alpha = 0{,}40381 - 0{,}40374 = 0{,}00007$. Het gezochte aantal seconden bedraagt: $\frac{0{,}00007}{0{,}00026} \times 60'' = \frac{210}{13} = 16''$ (afgerond).
We vinden dus: $\alpha = 66°11'16''$.

Voorbeeld 3: Bepaal α als gegeven is $\tan\alpha = 0{,}63560$.
Oplossing: In de tafel vinden we:

$$\left.\begin{array}{l}\tan 32°26' = 0{,}63544\\ \tan 32°27' = 0{,}63584\end{array}\right\}\ \text{het verschil is } 0{,}00040.$$

Verder is:

$$\tan\alpha - \tan 32°26' = 0{,}63560 - 0{,}63544 = 0{,}00016.$$

Voor het aantal seconden vinden we dus: $\frac{0{,}00016}{0{,}00040} \times 60'' = 24''$.
Hieruit volgt: $\alpha = 32°26'24''$.

Ter oefening maken de opgaven 220 t/m 224.
Oplossingen inzenden van de opgaven 225 t/m 230.

25,1. Grafische voorstelling van de functies $y = \log \sin x$ en $y = \log \cos x$

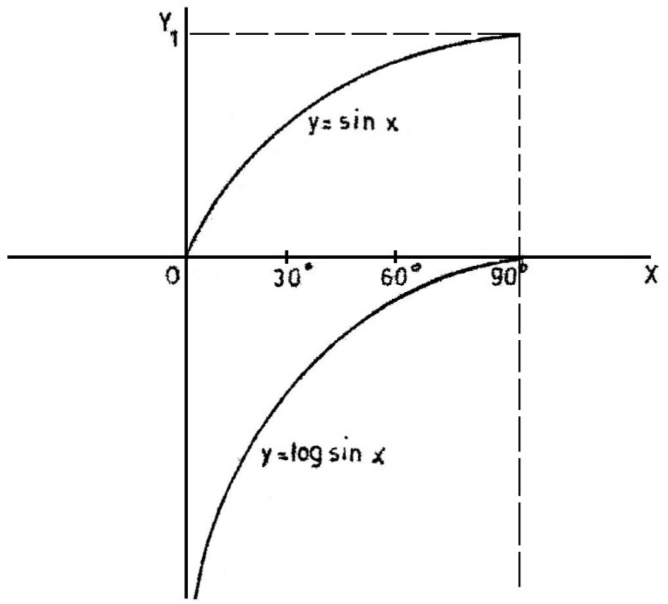

Fig. 25,1.

We weten dat als de hoek x toeneemt van 0° tot 90° de waarde van $\sin x$ toeneemt van 0 tot 1,

Daar $\sin x$ toeneemt van 0 tot 1 zal ook de logaritme van $\sin x$, korter geschreven als $\log(\sin x)$ of als $\log \sin x$, toenemen. In de lessen van de algebra over logaritmen hebben we geleerd dat $\log 0 = -\infty$ en $\log 1 = 0$. Hieruit volgt dat indien $\sin x$ toeneemt van 0 tot 1, $\log \sin x$ toeneemt van $-\infty$ tot 0.

De functie $y = \log \sin x$ is dus voor $0° < x < 90°$ steeds negatief en bereikt een maximum als $x = 90°$. In fig. 25,1 is $y \sin x$ en $y = \log \sin x$ getekend in het interval: $0° < x < 90°$.

Uit de figuur kunnen we zien dat in de nabijheid van de oorsprong F de toenamen van $\log \sin x$ bij gelijke toenamen van x veel groter zijn dan de toenamen in de buurt van 90°. In het interval $90° < x < 180°$ neemt $\sin x$ af van 1 tot 0, dus $\log \sin x$ neemt af van 0 tot $-\infty$.

In het interval $180° < x < 360$ is $\sin x$ negatief. Daar de logaritme van een negatief getal niet bestaanbaar is, zal in dit interval voor $\log \sin x$ geen waarde bestaan. Indien we $\sin x$ en $\log \sin x$ willen tekenen in het interval $90° < x < 180°$ krijgen we de figuur 25,1 gespiegeld t.o.v. de verticale lijn door 90° getekend. In het gebied, waar $\sin x$ positief is, zal dus ook de waarde van $\log \sin x$ bestaan.

Dienen we echter een waarde voor $\log \sin x$ uit te rekenen in het gebied waar $\sin x$ negatief is, dan volgen we weer dezelfde regel, die we in de algebra geleerd hebben voor het bepalen van de logaritme uit een negatief getal.

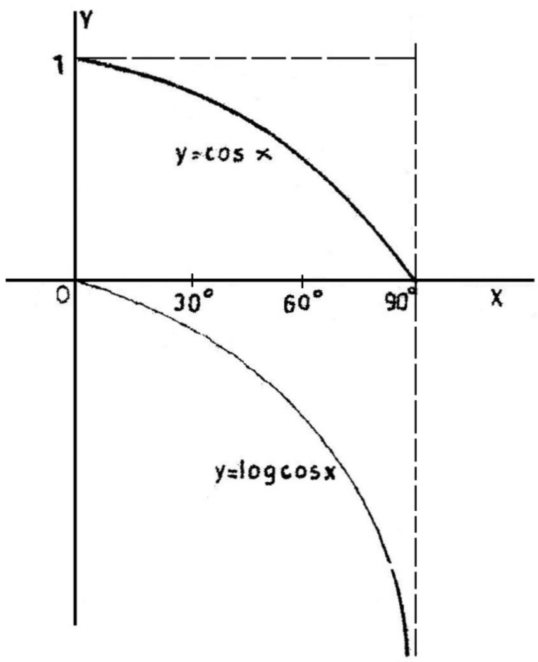

Fig. 25,2.

Voor $\log \cos x$ in het interval $0° < x < 90°$ zien we dat daar $\cos x$ afneemt van 1 tot 0, de $\log \cos x$ afneemt van 0 tot $-\infty$ (zie fig. 25,2). $\log \cos x$ is evenals $\log \sin x$ steeds negatief en bereikt een maximum voor $x = 0$ in het interval $0° < x < 90°$. In de figuur is tevens weer de cosinuslijn getekend. Voor $\log \cos x$ gelden praktisch dezelfde voorwaarden als $\log \sin x$. De $\log \cos x$ is echter nu onbestaanbaar in het interval $90° < x < 270°$, daar $\cos x$ in dat interval negatief is.

25,2. De grafische voorstelling van de functies $y = \log \tan x$ en $y = \log \cot x$

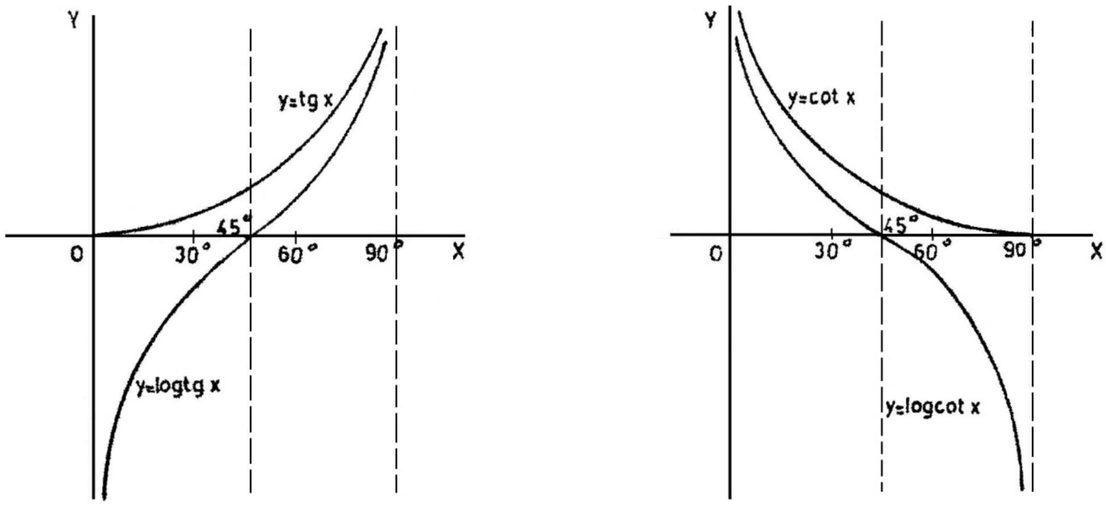

Fig. 25,3.

Als x toeneemt van 0° tot 90° neemt $\tan x$ toe van 0 tot ∞. Hieruit volgt dat $\log \tan x$ toeneemt van $\log 0 = -\infty$ tot $\log \infty = \infty$. Een bijzonder punt vinden we als $x = 45°$.
We weten dat $\tan 45° = 1$, dan geldt dat $\log \tan 45° = \log 1 = 0$. Voor $x = 45°$ vinden we dus het snijpunt van $y = \log \tan x$ met de x-as.

De figuur van $\log \cot x$ vinden we eenvoudig door de figuur van $\log \tan x$ te spiegelen om een verticale lijn door $x = 45°$ (zie fig. 25,3).

We weten dat: $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, zodat:

$\log \cot x = \log \frac{1}{\tan x} = -\log \tan x$.

Voor iedere waarde van x is dus $\log \cot x$ het tegengestelde van $\log \tan x$.
We kunnen de log cot lijn dus ook vinden door de log tan lijn te spiegelen t.o.v. de x-as.

Verder is $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ zodat $\log \csc x = \log \frac{1}{\sin x} = -\log \sin x$ en:

$\log \sec \mathrm{x} = \log \frac{1}{\cos \mathrm{x}} = -\log \cos \mathrm{x}$.

Dus de lijn $\csc x$ vinden we door de lijn $\log \sin x$ te spiegelen t.o.v. de x-as.
Zo eveneens met $\log \sec x$ t.o.v. $\log \cos x$. 34.

Oplossingen inzenden van de opgaven 231 t/m

26,1. De logaritmen-goniotafel

De logaritmen-goniotafel is zo ingericht dat men van elke scherpe hoek, die in graden, minuten en seconden is aangegeven, de waarden van $\log\sin\alpha$, $\log\cos\alpha$, $\log\tan\alpha$ en $\log\cot\alpha$ direct af kan lezen.
De waarden van $\log\sec\alpha$ en $\log\csc\alpha$ zijn niet vermeld. Men kan deze waarden afleiden uit de betrekkingen $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ en $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, dus uit $\log\sec\alpha = \log\frac{1}{\cos\alpha} = -\log\cos\alpha$ en:

$$\log\csc\alpha = \log\frac{1}{\sin\alpha} = -\log\sin\alpha.$$

Dit is eveneens mogelijk met $\log\cot\alpha = \log\frac{1}{\tan\alpha} = -\log\tan\alpha$.
Daar bij berekeningen de cotangens in verhouding tot de secans en de cosecans vrij veel voorkomt, zijn de waarden van $\log\cot\alpha$ toch in de tafels opgenomen.
Nu is bv.:
$\sin 50° = 0{,}76604$, dus $\log\sin 50° = \log 0{,}76604 = 0{,}88425 - 1$.
$\cos 89°50' = 0{,}00291$, dus $\log\cos 89°50' = \log 0{,}00291 = 0{,}46389 - 3$.

Men kan nu in de tafel deze logaritmen rechtstreeks opzoeken. In deze tafels vinden we echter niet de wijzers $-1, -3$ enz. vermeld. Om plaatsruimte te besparen telt men bij iedere waarde 10 op. We vinden dan in plaats van $0{,}88425 - 1$ $\quad 10 + 0{,}88425 - 1 = 9{,}88425$ en in plaats van $0{,}46389 - 3$ $\quad 10 + 0{,}46389 - 3 = 7{,}46389$.

Men moet dus achter elk getal uit de tafel de wijzer -10 plaatsen.

Men had ook een ander getal dan 10 bij kunnen tellen. Het getal 10 is echter voldoende groot voor de behoefte en gemakkelijk te onthouden. Men dient dus goed op de wijzer -10 te letten daar deze bij berekeningen dikwijls vergeten wordt.
Staat in de tafel aangegeven bv. 9,87634 dan moet men hiervoor lezen $9{,}87634 - 10$.

26,2. Het gebruik van de logaritmen-goniotafel indien de hoek gegeven is in graden en minuten

Opmerking: In plaats van het woord ‘logaritmen-goniotafel’ is het meer gebruikelijk om te spreken over de ‘logaritmen-sinustafel’.
Voor hoeken kleiner dan 45° staat boven aan de bladzijde het aantal graden vermeld. Dit gebeurt ook wel aan de linkerzijde van de bladzijde. De eerste kolom van de bladzijde, veelal aangegeven met de letter M of met min., geeft het aantal minuten aan, opklimmend met 1 minuut. Verder vinden we boven de pagina:

log sin; log tan; log cot; log cos.

In de kolommen hieronder kan men voor iedere waarde van een hoek, gegeven in graden en minuten de gezochte logaritme aflezen.

Voor het bepalen van de logaritmen de goniometrische verhoudingen van scherpe hoeken, die groter zijn dan 45°, zouden we deze eerst kunnen herleiden tot hoeken beneden 45° m.b.v. de regels die we geleerd hebben voor de complementaire hoeken bv. $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ enz. De tafel is echter zo ingericht, dat deze ook rechtstreeks voor de hoeken boven 45° te gebruiken is. Dit aantal graden wordt dan onder aan de pagina aangegeven. In de kolommen, die minuten aangeven rechts van de pagina, klimmen de minuten nu van beneden af aan gerekend op met 1 minuut.
Beschouwen we de kolom waarboven vermeld staat log sin, dan staat onder aan deze kolom log cos; zo ook bij de andere kolommen resp. log tan en log cot; log cot en log tan, en log cos en log sin.

Men dient bij het opzoeken hier zeer goed op te letten. Dus werkt men met hoeken kleiner dan 45°; de log van de gevraagde goniometrische verhouding boven aan de pagina en de minuten links op de pagina naar beneden gerekend en bij hoeken groter dan 45° de log van de gevraagde goniometrische verhouding onder aan de pagina opzoeken en de minuten rechts op de pagina naar boven beschouwen.

Voorbeelden:

1. Bepaal $\log \sin 14°48'$.

We zoeken de bladzijde op die aangegeven wordt met 14°. Op die pagina in de eerste kolom het aantal minuten, in ons geval 48. We zien dat in de kolom waarboven staat log sin de waarde 9,40730 wordt. Dus: $\log \sin 14°48' = 9{,}40730 - 10$.

2. Bepaal $\log \cot 72°35'$.

We zoeken de pagina waarop 72° aangegeven staat en vinden dit onder aan de pagina. In de laatste kolom zoeken we het aantal minuten, nl. 35.
De kolom aangegeven door log cot (onderaan de bladzijde) geeft aan 9,49652.
Dus: $\log \cot 72°35' = 9{,}49652 - 10$.

26,3. Het opzoeken van logaritmen van goniometrische verhoudingen van hoeken, die aangegeven zijn in graden, minuten en seconden, groter dan 2° en kleiner dan 88°

Hierbij moeten we gebruik maken van de kolommen, die van het bovenschrift d zijn voorzien; d is de eerste letter van het woord ‘differentiatie’ (verschil). De kolom waarboven vermeld staat $d.c.$ geldt zowel voor log tan als voor log cot. De $\log \sin$ en log cos hebben ieder hun eigen kolom.
Nemen we bv. $\log \sin 29°22'35''$, dan vinden we voor:

$$\log \sin 29°22' = 9{,}69055 - 10$$
$$\log \sin 29°23' = 9{,}69077 - 10.$$

Het verschil tussen deze twee is 0,00022. Het getal 22 staat nu boven de kolommetjes geheel rechts op de pagina, de differentiatiekolom genaamd.
Voor deze kolommetjes staan de getallen 10, 20, 30, 40, 50, 6, 7, 8 en 9.
Deze getallen geven het aantal seconden aan; het getal er achter wordt dus bij de log gevoegd of er van af getrokken.

Voor $30''$ vinden we 11,0 en voor $50''$ het getal 18,3. Dus $5''$ is 1,83, zodat we voor $35''$ vinden $11{,}0 + 1{,}83 = 12{,}83$. We ronden dit wee af zoals we dit ook in de algebra gezien hebben tot 13. We vinden dus:

$$\begin{array}{ll} \log \sin 39°22' = & 9{,}69055 - 10 \\ \underline{d\ 35'' \rightarrow \qquad\qquad 13} & + \\ & 9{,}69068 - 10 \end{array}$$

Voorbeeld:

Bepaal $\log \tan 76°15'46''$

In de log.-tafel vinden we:

$$d.c \qquad \log \tan 76°15' = 10{,}61137 - 10.$$

De kolom geeft aan het getal 55.

In de differentiatiekolom onder het getal 55 vinden we voor $48''$:
$36{,}7 + 7{,}3 = 44$. Dus:

$$\begin{array}{ll} \log \tan 76°15' = & 10{,}61137 - 10 \\ \underline{d.c.48'' \rightarrow \qquad\qquad 44} & + \\ \log \tan 76°15'48'' = & 10.61181 - 10 \end{array}$$

Ter oefening maken de opgaven 235 t/m 237.
Oplossingen inzenden van de opgaven 238 t/m 241.

HILVERSUM

27,1. Vervolg van het opzoeken van log. sin enz. van hoeken > 2° en < 88°

In de vorige les hebben we het opzoeken behandeld van de logaritmen van de sinus en de tangens in graden, minute en seconden. In verband met de stijgende waarden van $\log \sin \alpha$ en $\log \tan \alpha$ worden de waarden die we vonden in de differentiatiekolommen voor de seconden opgeteld bij de waarden van de $\log \sin \alpha$ of $\log \cot \alpha$ die in graden en minuten gevonden was.
Daar zowel $\log \cos \alpha$ als $\log \cot \alpha$ dalende functies zijn, moeten we bij deze laatsten de waarden, die we vinden voor eventuele seconden, aftrekken.

We zullen dit weer aan de hand van enige voorbeelden laten zien.

Voorbeeld 1:

Bepaal $\log \cos 33°22'37''$.

Oplossing:

In de tafel vinden we voor $\log \cos 33°22'$ de waarde $9{,}92177 - 10$ en voor $\log \cos 33°23'$ de waarde $9{,}92169 - 10$. Het verschil tussen deze beide waarden is 0,00008. In de differentiatiekolom vinden we $37''$ de waarde 5 (afgerond). Dus:

$$\begin{array}{lll} & \log \cos 33°22' & = 9{,}92177 - 10 \\ & \underline{37'' \rightarrow \qquad\qquad 5} & - \\ \text{dus:} & \log \cos 33°22'37'' & = 9{,}92172 - 10 \end{array}$$

Voorbeeld 2:

Bepaal $\log \cot 76°18'45''$.

Oplossing:

$$\begin{array}{ll} \log \cot 76°18' & = 9{,}38699 - 10 \\ \underline{45° \rightarrow \qquad\qquad 41} & - \\ & 9{,}38568 - 10 \end{array}$$

In verschillende tafels worden aparte bewerkingen opgegeven voor het opzoeken van de logaritmen der goniometrische verhoudingen van hoeken tussen 0° en 2° en tussen 88° en 90°.

Nu staat gewoonlijk in de tafels een gebruiksaanwijzing voor de gewenste logaritmen.
De cursist doet er dus het beste aan eerst de handleiding van de tafel die hij bezit goed door te nemen.
In de tafel, die we hier gebruiken, dus de tafel van Noordhoff kan de beschreven methode ook gebruikt worden voor de hoeken kleiner dan 2° en groter dan 88°, daar men hierin kleinere intervallen dan 1 minuut heeft opgenomen. Let overigens op de aanwijzingen.

27,2. Het terugzoeken in de vijf-decimalige logaritmen-sinustafel

Onder het terugzoeken verstaan we het bepalen van een scherpe hoek, als de logaritmen van een goniometrische verhouding gegeven is. Dit terugzoeken geschiedt in omgekeerde volgorde als het opzoeken. We gaan dit weer aan de hand van enige voorbeelden behandelen.

Voorbeeld 1:

Gegeven $\log \sin \alpha = 9{,}67597 - 10$. Bepaal de scherpe hoek α, die hieraan voldoet.

Oplossing:

We vinden in de tafel twee waarden waartussen de gegeven waarde ligt, nl.:

$$\log \sin 28°18' = 9{,}67586 - 10$$
$$\log \sin 28°19' = 9{,}67609 - 10.$$

Het verschil hiertussen bedraagt 0,00023. Om de hoek in seconden te bepalen, moeten we dus in de differentiatiekolom aangegeven onder 23, zoeken. Het verschil tussen de gegeven $\log \sin \alpha$ en $\log \sin 28°18'$ bedraagt:

$$\begin{array}{ll} \log \sin \alpha & = 9{,}67597 - 10 \\ \underline{\log \sin 28°18'} & \underline{= 9{,}67586 - 10} \; - \\ & \quad 0{,}00011 \end{array}$$

In de differentiatiekolom vinden we als dichtstbijzijnd (kleiner) getal 7,7; behorend bij $20''$. Er blijft over $11 - 1{,}7 = 3{,}3$. Nu is het dichtstbijzijnde (kleinere) getal 3,1 behorend bij $8''$. Er blijft over een verschil van 0,2. Volgens het tabelletje behoort hierbij $0{,}5''$. (N.B. bij $50''$ is $d = 19{,}2$; dus bij $0{,}5''$ is $d = 0{,}192 \approx 0{,}2$.)

Bij het verschil 11 behoren dus $20 + 8 + 0{,}5 = 28{,}5 \approx 29$ sec.
De gevraagde hoek is: $\alpha = 28°18'29''$.

Voorbeeld 2:

Gegeven $\log\tan\alpha = 10{,}52641 - 10$.
Gevraagd: bepaal de scherpe hoek α.
Oplossing: In de tafel vinden we resp.:

$$\log\tan 73°25' = 10{,}52608 - 10$$
$$\log\tan 73°26' = 10{,}52654 - 10.$$

Het verschil bedraagt 0,00046.

We zoeken dus voor het aantal seconden in de differentiatiekolom aangegeven onder het getal 46. Het verschil tussen $\log\tan\alpha$ en $\log\tan 73°25'$ bedraagt:

$$\begin{array}{ll} \log\tan\alpha & = 10{,}52641 - 10 \\ \log\tan 73°25' & = \underline{10{,}52608 - 10} \; - \\ & \quad 0{,}00033. \end{array}$$

In de differentiatiekolom vinden we voor $40''$ het getal 30,7. Het verschil in nu nog $33 - 30{,}7 = 2{,}3$.

Voor $3''$ vinden we het getal 2,31, dus voor $43''$ vinden we $30{,}7 + 2{,}31 = 33{,}01$.
Hiermee is het verschil 33 voldoende dicht benaderd. De gevraagde hoek is dan: $\alpha = 73°25'43''$.

Voorbeeld 3:

Gegeven $\log\cos\alpha = 9{,}63518 - 10$.
Gevraagd: bepaal de scherpe hoek α.
Oplossing: In de tafel vinden we respectievelijk voor:

$$\begin{array}{ll} \log\cos 64°25' & = 9{,}63531 - 10 \\ \log\cos 64°26' & = \underline{9{,}63504 - 10} \; - \end{array}$$

Het verschil bedraagt: 0,00027.

We kijken in de differentiatiekolom aangegeven onder 27.
Verder is $\log\cos 64°25' - \log\cos\alpha = (9{,}63531 - 10) - (9{,}65318 - 10) = 0{,}00013$.
Voor $30''$ vinden we 13,5 voor $1''$ vinden we 0,45. Dus $29'' = 13{,}5 - 0{,}45 = 13{,}05$.
Zodat: $\alpha = 64°25'29''$.

Voorbeeld 4:

Gegeven $\log\cot\alpha = 9{,}72465 - 10$
Gevraagd: bepaal de scherpe hoek α.
Oplossing:

$$\begin{array}{ll} \log\cot 62°3' & = 9{,}72476 - 10 \\ \log\cot 62°4' & = \underline{9{,}72445 - 10} \; - \\ & \quad 0{,}00031. \end{array}$$

(dus differentiatiekolom 31.)

Verder is $\log\cot 62°3' - \log\cot\alpha = (9{,}72476 - 10) - (9{,}72465 - 10) = 0{,}00011$.
We vinden voor $20''$ het getal 10,3 en voor $2''$ het getal 1,03, dus: $22''$ =11,33.

De gevraagde hoek is dus: $\alpha = 62°3'22''$.

Oplossingen inzenden van de opgaven 242 t/m 248.

28,1. Berekeningen met goniometrische verhoudingen van scherpe hoeken

Moeten producten, quotiënten, machten of samenstellingen hiervan, van goniometrische verhoudingen van willekeurige scherpe hoeken bepaald worden, dan worden deze herleid tot vormen waarin alleen scherpe hoeken voorkomen. Blijkt de vorm na herleiding negatief te zijn, dan nemen we de vorm weer tegengesteld.

Voorbeeld 1: Bepaal x als gegeven is:

$$x = \frac{\cot 13°45'\,.\ \cos 115°24'}{\tan 159°42'\ .\ \sin 306°19'}\,.$$

Hierin is:

$$\begin{aligned} \cos 115°24' &= -\cos 64°36' \\ \tan 159°42' &= -\tan 20°18' \\ \sin 306°19' &= -\sin 53°40' \end{aligned}$$

zodat: $$x = -\frac{\cot 13°45'\,.\ \cos 64°36'}{\tan 20°18'\ .\ \sin 53°40'}\,.$$

we stellen: $-x = y$, dus: $y = \frac{\cot 13°45'\,.\ \cos 64°36'}{\tan 20°18'\ .\ \sin 53°40'}$.

Hieruit volgt:

$\log y = \log\cot 13°45' + \log\cos 64°36' - (\log\tan 20°18' + \log\sin 53°40')$

$$\begin{array}{lrl} \log\cot 13°45' = & 10{,}61137 - 10 & \\ \log\cos 64°36' = & \underline{9{,}63239 - 10} & + \\ & 20{,}24376 - 20 & \\ & \underline{19{,}47421 - 20} & - \\ \log y = & 0{,}77755. & \end{array} \qquad \begin{array}{lrl} \log\tan 20°18' = & 9{,}56810 - 10 & \\ \log\sin 53°40' = & \underline{9{,}90611 - 10} & + \\ & 19{,}47421 - 20 & \end{array}$$

Voor de y terugzoeken in de gewone logaritmentafel. $y = 5{,}8553$. Dus: $x = -5{,}8553$.

Voorbeeld 2: Bepaal de hoek x die voldoet aan:

$$\cos x = \frac{\tan 207°22'55''}{\sin 323°17'29''}\,.$$

Oplossing: $\tan 207°22'55'' = \tan 27°22'55''$.
$\sin 323°17'29'' = -\sin 36°42'31''$

Dus: $$\cos x = -\frac{\tan 27°22'55''}{\sin 36°42'31''}\,.$$

Willen we nu het minteken wegwerken dan schrijven we:

$$-\cos x = \frac{\tan 27°22'55''}{\sin 36°42'31''}\,.$$

We weten nu, dat: $\cos(180° - x) = -\cos x$ en $\cos(180° + x) = -\cos x$, dus beide oplossingen zijn mogelijk. In het eerste geval geldt:

$\log\cos\cos(180 - x) = \log\tan 27°22'55'' - \log\sin 36°42'31''$

en in het tweede geval:

$\log\cos(180° + x) = \log\tan 27°22'55'' - \log\sin 36°42'31''$.

We vinden nu:

$$\begin{array}{lrl} \log\tan 27°22'55'' = & 9{,}71428 - 10 & \\ \log\sin 36°42'31'' = & \underline{9{,}77652 - 10} & - \end{array}$$

daar deze aftrekking een negatief getal op zou leveren schrijven we de vormen als volgt:

$$\begin{array}{lrl} \log\tan 27°22'55'' = & 10{,}71428 - 11 & \\ \log\sin 36°42'31'' = & \underline{9{,}77652 - 10} & - \\ & 0{,}93776 - \ 1 & \end{array}$$

(de waarde verandert niet als we voor en achter het -teken 1 of meer optellen) dus $\log\cos(180° - x) = 0{,}9377 - 1$

of: $\log\cos\ (180° - x) = 9{,}93776 - 10,$

dus: $180° - x = 29°57'1'',$

dus: $x = 180° - 29°57'1'' = 150°2'59''.$

Nu geldt echter voor x plus of min 360° dezelfde waarde evenals voor $x$plus of min een veelvoud van 360°.
We geven dit veelvoud aan door $k.360°$, waarin k de rij der natuurlijke getallen voorstelt.
dus: 0, 1, 2, 3, 4, ...

De oplossing is dus:

$$x = 150°2'59''\ \pm k.360°,$$

Als tweede oplossing vinden we:

$$\log\cos\ (180° + x) = 9{,}93776 - 10,$$

dus: $180° + x = 29°57'1'',$

daar we een hoek alleen niet negatief geven wel bv. als $\cos(-x)$ enz.
en daar we hier vinden:

$$x = 29°57'1'' - 180° = -150°2'59''$$

berekenen we deze waarde van x door de waarde nogmaals 360° af te trekken, of door: $29°57'1''$ op te tellen bij 180°.

Dus: $x = 180° + 29°57'1'' = 209°57'1''.$

Als totale oplossing dan weer:

$$x = 209°57'1''\ \pm k.360°.$$

We kunnen een en ander ook tot een oplossing samenstellen door te schrijven:

$$x = (180° \pm 29°57'1'') \pm k.360°.$$

<u>Voorbeeld 3</u>: Bepaal alle waarden van x uit:

$$\tan x = \frac{31{,}72\ .\ \cos 36°12'22''\ .\ \tan 70°33'14''}{82{,}56\ .\ \sin 63°26'50''}.$$

<u>Oplossing:</u> $\log\tan x = \log 31{,}72 + \log\cos 36°12'22'' + \log\tan 70°33'14'' +$
$-(\log 82{,}56 + \log\sin 63°26'50'').$

$$\begin{array}{lrl}
\log 31{,}72 & = & 1{,}50133 \\
\log\cos 36°12'22'' & = & 9{,}90682 - 10 \\
\log\tan 70°33'14'' & = & \underline{10{,}45215 - 10} + \\
 & & 21{,}86030 - 10 \\
 & & \underline{11{,}86836 - 10} - \\
\log\tan x = & & 9{,}99294 - 10
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl}
\log 82{,}56 & = & 1{,}91677 \\
\log\sin 63°26'50'' & = & \underline{9{,}95159 - 10} + \\
 & = & 11{,}86836 - 10
\end{array}$$

Hieruit volgt: $x = 44°32'$
We vinden nu als oplossing:

$$x_1 = 44°32' \pm k.360°$$
$$x_2 = (180° + 44°32') \pm k.360°.$$

Als een oplossing kunnen we dit geven als:

$$x = 44°32' \pm k.180°.$$

Immers we vinden voor de waarden van de tangens en de cotangens bij een veelvoud van 180° steeds dezelfde waarden.

Oplossingen inzenden van de opgaven 249 t/m 252.

HILVERSUM

29,1. Cyclometrie

In les 10 van de vlakke meetkunde hebben we kennis gemaakt met het begrip radiaal.

Een radiaal is de grootte van de hoek die, als middelpuntshoek van een cirkel beschouwd, op een boog staat ter lengte van de straal van de cirkel.

De omtrek van een cirkel is gelijk aan $2\pi r$, dus 2π maal de straal van de cirkel. Een hoek van 360° bevat dus 2π radialen. Hieruit volgt: 1 radiaal $= \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{2\pi} =$ $= 57°17'45''$. De $\angle AMB$ heeft een grootte van α radialen. Veronderstellen we weer dat de cirkel uit fig. 29,1 de eenheidscirkel is, dus een cirkel met een straal , die de eenheid van lengte heeft. Uit de definitie van een radiaal volgt dan: boog $AB = \alpha$.

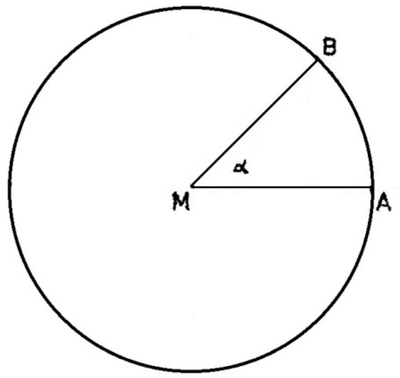

Fig. 29,1.

Hierin is α in radialen uitgedrukt. Beschouwen we nu een zeer kleine middel-puntshoek α in een cirkel met straal 1 (zie fig. 29,2). Nu geldt, dat $\sin\alpha = AC$, terwijl $\alpha = boog\ AB$. Nemen we nu de hoek α zeer klein, dan nadert het lijnstuk AC tot boog AB, dus kunnen we zeggen, dat $\sin\alpha$ nadert tot α.

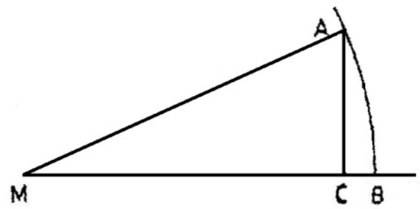

Fig. 29,2.

Voor kleine hoeken mogen we $\sin\alpha$ vervangen door x, waarbij x uitgedrukt is in radialen.

We kunnen ook zeggen, dat voor kleine waarden van x geldt:

$$\frac{\sin x}{x} = 1.$$

In fig. 29,3 is $\tan\alpha$ getekend voor een kleine hoek α, dus boog $AB = \alpha$ en $\tan\alpha = BD$. Dus geldt voor kleine hoeken , dat $\tan\alpha = \alpha$ of: $\frac{\tan\alpha}{\alpha} = 1$.

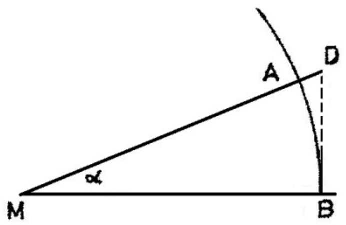

Fig. 29,3.

Voor kleine hoeken mogen we $\tan\alpha$ vervangen door x, waarbij x uitgedrukt is in radialen.

Beschouwen we nu $\cos\alpha$ voor kleine waarden van α, dan blijkt dat als α tot nul nadert, $\cos\alpha$ tot 1 nadert. Voor $\cos\alpha$ geldt dus niet hetzelfde als voor $\sin\alpha$ en $\tan\alpha$ bij kleine waarden van α.

stellen we nu $\sin\alpha = a$, en moeten we α oplossen, dan wil dit zeggen dat we die hoek moeten bepalen, waarvan de sinus gelijk is aan a.

Indien x uitgedrukt is in radialen, dan kunnen we dit ook als volgt uitdrukken:

x is de boog waarvan de sinus gelijk is aan a.

Dit schrijven we verkort als volgt: $x = boog\ sinus\ \alpha$ of nog korter:

$$x = bg\ \sin\alpha$$

In plaats van het woord ‘boog’ gebruikt men dikwijls de Latijnse naam ‘arcus’, zodat we in plaats van $bg\sin\alpha$ schrijven arcus α of kortweg $\arcsin\alpha$. Zo kennen we ook: arccos, arctan, arccsc, arcsec en arccot α.

De uitdrukkingen met het woord boog(cyclus) en de berekeningen hiermee vatten we samen onder het onderwerp cyclometrie.

29,2. Enige cyclometrische betrekkingen

Uit de betrekking $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ volgt door beide leden gelijk aan p te stellen: $\sin(-\alpha) = p$, dus $-\alpha = bg\sin p$ of $\alpha = -bg\sin p$ en $-\sin\alpha = p$, dus $\sin\alpha = -p$ of: $\alpha = bg\sin(-p)$. Uit deze beide betrekkingen volgt: $bg\sin(-p) = -bg\sin p$.

Beschouwen we nu de betrekking:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Stellen we beide kanten van de gelijkheid gelijk aan p, dan is:

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = p$ of $\frac{\pi}{2} - \alpha = bg\cos p$ of $\alpha = \frac{\pi}{2} - bg\cos p$ en $\alpha = bg\sin p$.

Hieruit volgt:

$bg\sin p = \frac{\pi}{2} - bg\cos p$ of $bg\sin p + bg\cos p = \frac{\pi}{2}$.

Op deze manier kunnen we alle goniometrische gelijkheden omwerken tot cyclometrische gelijkheden. We beschouwen bij de cyclometrie alleen de waarden, waarbij de hoeken gelegen zijn tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$ voor $bg\sin p$ en $bg\tan p$ en tussen 0 en π voor $bg\cos p$. Men noemt de hoek tussen deze grenzen de hoofdwaarde,

29,3. Goniometrische vergelijkingen

Als $\sin x = \sin\alpha$, dan is $x = \alpha$ of $x - 180° - \alpha$ of $x = 360° + \alpha$ of $x = 540 - \alpha$ enz. Samengevat in één formule kunnen we zeggen:

Als $\sin\alpha = \sin\alpha$, dan is $x = \alpha \pm k.360°$
of: $x = (180° - °\alpha) \pm k.360°$.

Voor $\cos x = \cos\alpha$ vinden we:
$x = \alpha \pm k.360°$
of: $x = -\alpha \pm k.360°$.

Voor $\tan\alpha = \tan\alpha$ vinden we:
$x = \alpha \pm k.180°$.

Voor $\cot x = \cot\alpha$ vinden we:
$x = \alpha \pm k.180°$.

Oplossingen inzenden van de opgaven 253 en 254.