R.T.

HILVERSUM

18,1. Ingeklede vergelijkingen.

In de vorige lessen hebben we de vergelijkingen met één onbekende behandeld. Deze vergelijkingen waren echter reeds opgesteld en behoefden nog slechts opgelost te worden. Bij de ingeklede vergelijkingen dienen we zelf de vergelijking op te stellen. De opgave is bij de ingeklede vergelijking in woorden opgesteld, waarbij men zelf de onbekende moet kiezen en daarna de vergelijking op moet stellen. Dit opstellen van de vergelijking is meestal niet zo eenvoudig en vergt veel routine van de leerling. We zullen dus eerst met enige vooroefeningen beginnen, veel voorbeelden geven en dan langzamerhand naar de moeilijker opgaven overgaan.

Als het getal x genoemd wordt, wat is dan het drievoud van dit getal?
Het drievoud van het getal is dan $3x$. Hoe stelt men het getal voor plus 50?
Het getal plus vijftig is $x + 50$.

Als twee getallen 30 verschillen, hoe kunnen we deze getallen dan voorstellen?
Hierbij zijn twee mogelijkheden, die beiden goed zijn nl:
Stel het ene getal x, dan is het andere getal $x - 30$. Het is echter ook goed als men zegt het ene getal is x en het andere $x + 30$.

Als een vader 40 jaar is en zijn zoon 15 jaar, hoe oud zijn ze dan over x jaar, en hoe oud zijn ze dan samen? Over x jaar is de vader $40 + x$ jaar en de zoon $15 + x$ jaar.
Samen zijn ze dan $40 + x + 15 + x = 55 + 2x$ jaar.

Bij een getal van drie cijfers is het cijfer der tientallen 5 meer dan het cijfer der eenheden en het cijfer der honderdtallen is 3 meer dan het cijfer der tientallen. Hoe stelt men dit getal voor?
Stel het cijfer der eenheden is x, dan is het cijfer der tientallen $x + 5$ en het cijfer der honderdtallen is $x + 5 + 3 = x + 8$.
We moeten nu het getal opstellen. Bij een normaal rekenkundig getal levert het geen moeilijkheden op om een getal waarvan het cijfer der eenheden, tientallen en honderdtallen bekend is op te stellen.
Nemen we bv. dat het cijfer de eenheden 8, dat der tientallen 5 en dat der honderdtallen 2 is, dan kunnen we zonder meer opschrijven dat het getal 258 is.
Doen we dit bij het getal uit ons voorbeeld dan zouden we vinden: $(x + 8)(x + 5)x$.
Maar dit betekent in de algebra een vermenigvuldiging zodat we deze schrijfwijze hier niet kunnen gebruiken. Komen we nu nog eens terug op ons getal 258 dan hadden we ook kunnen zeggen dat we het getal als volgt schrijven: $200 + 50 + 8$.
Hierbij hebben we dus gebruik gemaakt van de wetenschap dat 1 honderdtal 100 eenheden bevat en 1 tiental, 10 eenheden.
Hiervan zullen we nu gebruik maken om het getal op te stellen.
We redeneren dus als volgt: we hebben $(x + 8)$ honderdtallen, dit zijn $100(x + 8)$ eenheden; $(x + 5)$ tientallen, dit zijn $10(x + 5)$ eenheden.
Totaal hebben we dus $100(x + 8) + 10(x + 5) + x$ eenheden. Het gevraagde getal is dus:
$100(x + 8) + 10(x + 5) + x = 100x + 800 + 10x + 50 + x = 111x + 850$.

18,2. Voorbeelden van oplossingen van ingeklede vergelijkingen.

Een getal is viermaal zo groot als een ander getal; hun som overtreft het $\frac{2}{5}$ deel van het kleinste getal met 92. Bereken de getallen.

<u>Eigenschap:</u> Een product wordt tot een macht gebracht, door elke factor tot die macht te brengen, dus:

$$\left(\sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[3]{b}\,.\,\sqrt[3]{c}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3.\left(\sqrt[3]{b}\right)^3.\left(\sqrt[3]{c}\right)^3 = a.b.c.$$

Van deze eigenschap maken we gebruik om zoveel mogelijk factoren voor het wortelteken te brengen.

$$\sqrt[5]{a^{12}b^6} = \sqrt[5]{a^{10}b^5a^2b} = \sqrt[5]{(a^2)^5b^5}\ \sqrt[5]{a^2b} = a^2b\sqrt[5]{a^2b}.$$

$$\sqrt[3]{a^{14}b^{25}} = \sqrt[3]{(a^4)^3(b^8)^3a^2b} = a^4b^8\sqrt[3]{a^2b}.$$

Men dient er goed op te letten dat het wortelteken over de gehele vorm waaruit de wortel getrokken moet worden wordt geplaatst. Een andere methode is het wortelteken voor de vorm te plaatsen en de vorm waaruit de wortel getrokken moet worden tussen haakjes. Van deze laatste methode zullen we ons bedienen indien de vormen groot zijn bv: $\sqrt[3]{}(a^8b^4c^5d^2e^9) = a^2bce^3\sqrt[3]{}(a^2bc^2d^2)$.

Het is omgekeerd ook mogelijk om factoren die voor het wortelteken staan onder het wortelteken te brengen door het getal dat voor de wortel staat onder de wortel te plaatsen waarbij de exponent van het getal vermenigvuldigd wordt met de wortelexponent bv:
$ab^2\sqrt[5]{c^2d} = a^5b^{10}c^2d.$

<u>Eigenschap:</u> Een wortel uit een quotiënt is gelijk aan het quotiënt van de gelijknamige wortels uit deeltal en deler.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Van deze eigenschap wordt gebruik gemaakt om wortels uit breuken te herleiden. Een wortel uit een breuk is herleid als er onder het wortelteken geen breuk meer voorkomt en zoveel factoren als mogelijk voor het wortelteken zijn gebracht.

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a^2b^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{b}\ ; \qquad \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{6}\sqrt{3}\ ;$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^3b^2}{c^4d^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^3b^2cd^3}{c^5d^5}} = \frac{\sqrt[5]{a^3b^2cd^3}}{\sqrt[5]{c^5d^5}} = \frac{1}{cd}\sqrt[5]{a^3b^2cd^3}$$

We kunnen deze laatste eigenschap ook omgekeerd gebruiken nl: het quotiënt van twee gelijknamige wortels is gelijk aan de gelijknamige wortel uit het quotiënt van de getallen onder de worteltekens.

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^2}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}\ ; \qquad \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4}{a^2}} = \sqrt[5]{a^2}.$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^7bc^{10}}}{\sqrt[3]{a^4b^5c^3}} = \sqrt[3]{\frac{a^7bc^{10}}{a^4b^5c^3}} = \sqrt[3]{\frac{a^3c^7}{b^4}} = \frac{ac^2}{b}\sqrt[3]{bc}\ .$$

Ter oefening maken de opgaven 251 t/m 255.
Oplossingen inzenden van de opgaven 256 t/m 260.

Vervolg wortelvormen.

27,1. Eigenschap: De waarde van een wortel verandert niet als men de exponent van de macht en de wortelexponent met eenzelfde getal vermenigvuldigt, of door eenzelfde getal deelt.

vb: $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[9]{a^6}$; $\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{\boldsymbol{a^{pn}}}$ **.**

van vermenigvuldigen van de exponenten maken we gebruik om wortels gelijknamig te maken, waarna vermenigvuldiging, deling, aftrekking of optelling van de wortelvormen mogelijk is.

$\sqrt[3]{a}\,\sqrt[5]{b^2}\,\sqrt{c} = \sqrt[30]{a^{10}}\,\sqrt[30]{b^{12}}\,\sqrt[30]{c^{15}} = \sqrt[30]{\boldsymbol{a^{10}b^{12}c^{15}}}$.

Van het delen van de exponenten maken we gebruik om wortelvormen te vereenvoudigen.

$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$; $\sqrt[2n]{a^{mn}} = \sqrt{\boldsymbol{a^m}}$.

Eigenschap: de p^{de} machtswortel uit de q^{de} machtswortel van een getal is gelijk aan de pq^{de} machts-wortel van het getal.

$$\sqrt[p]{\left(\sqrt[q]{a}\right)} = \sqrt[pq]{\boldsymbol{a}} \ ;$$

vb: $\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{a}\right)} = \sqrt[15]{\boldsymbol{a}}$; $\sqrt[7]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[14]{\boldsymbol{a^3}}$.

27,2. Wortels uit algebraïsche getallen.

De tweede machtswortel uit 4 is $+2$ en -2, omdat $(+2)^2 = 4$ en $(-2)^2 = 4$.
In het algemeen geldt dat evenmachtswortels uit positieve getallen twee waarden hebben en wel een positieve en een negatieve waarde.
Moeten we een evenmachtswortel trekken uit een getal dan moeten we de twee waarden die hieruit kunnen ontstaan beiden vermelden.
We doen dit door het plus- en het minteken boven elkaar te plaatsen, bv. $\sqrt{16} = \pm 4$. (Denk erom, dit heeft niet de betekenis ‘plusminus’, hetgeen ongeveer 4 zou betekenen, we spreken het uit als: plus- of min 4. Voor ‘ongeveer gelijk aan’, gebruiken we meestal het teken $\approx$).
Evenmachtswortels uit negatieve getallen bestaan niet, omdat we geen getal kunnen vinden dat tot een even macht gebracht negatief is. dit zijn zogenaamde onbestaanbare- of imaginaire*[1] getallen.
In tegenstelling met de imaginaire getallen noemt men alle andere getallen reële getallen.
De onevenmachtswortels uit een positief getal geeft als antwoord slechts één waarde en wel een positieve. De onevenmachtswortel uit een negatief getal geeft eveneens slechts één waarde als uitkomst, maar deze is negatief.
Zo is: $\sqrt[3]{8} = 2$ omdat $2^3 = 8$ en $\sqrt[3]{-8} = -2$ omdat $(-2)^3 = -8$.

We zullen nu van de diverse genoemde eigenschappen in deze les een aantal voorbeelden uitwerken.
Voorbeeld 1: Herleid de volgende wortelvorm:

$\sqrt[5]{\dfrac{pq}{p^3q^2r^3s^7}}$ omdat we van de factoren in de noemer machten moeten maken waarvan de exponenten 5 of een veelvoud van 5 moeten zijn, heeft het weinig zin om door de factoren p en q te delen, daar we dan toch weer met diezelfde factoren moeten vermenigvuldigen. We vinden nu:

$$\sqrt[5]{\frac{pq}{p^3q^2r^3s^7}} = \sqrt[5]{\frac{p^3q^4r^2s^3}{p^5q^5r^5s^{10}}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{pqrs^2}}\sqrt[5]{\boldsymbol{p^3q^4r^2s^3}} \ .$$

[1] Zie voor imaginaire getallen les 36. (FV)

44,1. Grafische voorstelling van een complex getal (vervolg).

Bestaat een getal uit meer reële en imaginaire grootheden, dan voegen we de reële getallen bij elkaar en de imaginaire getallen bij elkaar en nemen dan, om de absolute waarde te bepalen, de wortel uit de som der kwadraten van het reële en het imaginaire deel. Voor de tangens van het argument nemen we het imaginaire deel gedeeld door het reële deel.
Voorbeeld: Wat is de absolute waarde en de tangens van het argument van het getal:

$a + jb + c - d + jf - jg$? We schrijven dit getal als:

$(a + c - d) + j(b + f - g)$. De absolute waarde is nu:

$\sqrt{(a + c - d)^2 + (b + f - g)^2}$ en $\tan\varphi = \frac{b+f-g}{a+c-d}$.

We dienen er goed op te letten dat het getal eerst gesplitst moet worden in een reëel en een imaginair deel voordat we modulus en argument bepalen.
Voorbeeld: Wat zijn modulus en argument van $\frac{1}{a+jb}$?

Oplossing:

$$\frac{1}{a+jb} = \frac{1}{a+jb} \times \frac{a-jb}{a-jb} = \frac{a-jb}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - j\,\frac{b}{a^2+b^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}}. \quad \tan\varphi = \frac{-\frac{b}{a^2+b^2}}{\frac{a}{a^2+b^2}} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}.$$

Later zullen we methoden leren om de modulus en argument van producten, quotiënten en machten van complexe getallen op een snellere manier op te lossen. Het is hiervoor echter nodig om een groot deel der goniometrie te kennen zodat we dit tot later zullen uitstellen. Daar we er echter in de techniek een groot gemak van hebben, zullen we deze methoden aangeven zonder ze te bewijzen.
Het is dus raadzaam het nu uit het hoofd te leren en zonder meer toe te passen.

Regel 1: Een product van twee complexe getallen geeft als uitkomst een nieuw complex getal met als modulus het product der moduli der oorspronkelijke complexe getallen en als argument de som der argumenten. (Let er op: niet de som der tangenten, doch de som der hoeken.)

Om een gebruik van de argumenten te kunnen maken, moeten we de goniometrie kennen, zodat we bovenstaande regel en ook de volgende slechts nuttig kunnen gebruiken om de absolute waarde van een complexe uitdrukking te vinden.
Voorbeeld: De modulus van $(a + jb)(c + jd) = \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$.

Regel 2: Een quotiënt van twee complexe getallen geeft als uitkomst een nieuw complex getal met als modulus het quotiënt der moduli der oorspronkelijke complexe getallen en als argument het verschil der argumenten.

Voorbeeld: De modulus van $\frac{a+jb}{c+jd}$ is $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$.

Regel 3: Een complex getal tot een macht gebracht geeft als uitkomst een nieuw complex getal met als modulus de modulus van het oorspronkelijke complex getal tot die macht en als argument de macht maal het argument van het oorspronkelijke complexe getal.
Voorbeeld: De modulus van $(a + jb)^n$ is $\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^n$.

Enige uitgewerkte voorbeelden:
Bepaal de modulus van $(3 + 4j)(5 - 2j)$.

De a, b, c – formule.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Deze formule staat in de wiskunde bekend als de a ,b, c – formule.

Toepassingen:

1. Los x op uit: $5x^2 - 11x - 42 = 0$.

Oplossing: $x_{1,2} = \frac{+11 \pm \sqrt{121 + 840}}{10} = \frac{+11 \pm \sqrt{961}}{10} = \frac{11 \pm 31}{10}$, dus:

$x_1 = \frac{11 + 31}{10} = \frac{42}{10} = \mathbf{4{,}2}$ en $x_2 = \frac{11 - 31}{10} = \frac{-20}{10} = \mathbf{-2}$.

2. Eveneens uit: $7x^2 + 13x - 2 = 0$.

Oplossing: $x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 56}}{14} = \frac{-13 \pm \sqrt{225}}{14} = \frac{-13 \pm 15}{14}$, zodat:

$x_1 = \frac{-13+15}{14} = \frac{2}{14} = \mathbf{\frac{1}{7}}$ en $x_2 = \frac{-13-15}{14} = \frac{-28}{14} = \mathbf{-2}$

3. Eveneens uit: $3x^2 - 4x - 2 = 0$.

Oplossing: $x_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 + 24}}{6} = \frac{+4 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$, zodat:

$x_1 = \mathbf{\frac{2 + \sqrt{10}}{3}}$ en $x_2 = \mathbf{\frac{2 - \sqrt{10}}{3}}$.

4. Eveneens uit: $x^2 + (a - b)x - ab = 0$.

Oplossing: $x_{1,2} = \frac{-(a-b) \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4ab}}{2} = \frac{-(a-b) \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab}}{2} =$

$= \frac{-(a-b) \pm \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}}{2} = \frac{-(a-b) \pm \sqrt{(a+b)^2}}{2} = \frac{-(a-b) \pm (a+b)}{2}$, zodat:

$x_1 = \frac{-(a-b) + (a+b)}{2} = \frac{-a + b + a + b}{2} = \frac{2b}{2} = \boldsymbol{b}$ en

$x_2 = \frac{-(a-b) - (a+b)}{2} = \frac{-a + b - a - b}{2} = \frac{-2a}{2} = \boldsymbol{-a}$.

5. Eveneens uit: $x^2 - 2(m - n)x - 4mn = 0$.

Oplossing: $x_{1,2} = \frac{2(m-n) \pm \sqrt{4(m-n)^2 + 16mn}}{2} = (m-n) \pm \sqrt{(m-n)^2 + 4mn} =$

$= (m-n) \pm \sqrt{m^2 - 2mn + n^2 + 4mn} = (m-n) \pm \sqrt{m^2 + 2mn + n^2} = (m-n) \pm \sqrt{(m+n)^2} =$

$= (m-n) \pm (m+n)$, dus: $x_1 = m - n + m + n = \mathbf{2m}$ en $x_2 = m - n - m - n = \mathbf{-2n}$.

6. Eveneens uit: $(b - c)x^2 + (c - a) + (a - b) = 0$.

Oplossing: $x_{1,2} = \frac{-(c-a) \pm \sqrt{(c-a)^2 - 4(b-c)(a-b)}}{2(b-c)} = \frac{-(c-a) \pm \sqrt{c^2 - 2ac + a^2 - 4ab + 4b^2 + 4ac - 4bc}}{2(b-c)} =$

$= \frac{-(c-a) \pm \sqrt{c^2 + 2ac + a^2 - 4b(a+c) + 4b^2}}{2(b-c)} = \frac{-(c-a) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4b(a+c) + 4b^2}}{2(b-c)} = \frac{-(c-a) \pm \sqrt{(a+c-2b)^2}}{2(b-c)} =$

$= \frac{-(c-a) \pm (a+c-2b)}{2(b-c)}$, dus: $x_1 = \frac{-(c-a) + (a+c+2b)}{2(b-c)} = \frac{-c + a + a + c - 2b}{2(b-c)} = \frac{2a-2b}{2(b-c)} = \mathbf{\frac{a-b}{b-c}}$.

en: $x_2 = \frac{-(c-a) - (a+c-2b)}{2(b-c)} = \frac{-c + a - a - c + 2b}{2(b-c)} = \frac{2b - 2c}{2(b-c)} = \mathbf{1}$.

Ter oefening maken de opgaven 448 t/m 452.
Oplossingen inzenden van de opgaven 453 t/m 457.