HOGERE EN MIDDELBARE TECHNISCHE SCHOOL VOOR ELEKTRONICA

BERGWEG 33
HILVERSUM

Directie Rens en Rens
Gevestigd sinds 1925

TELEFOON 47474
GIRO 86580

Het construeren van figuren

20,1. De cirkel

Een cirkel of cirkelomtrek is een gesloten kromme lijn, waarvan alle punten in hetzelfde vlak liggen en even ver verwijderd zijn van een in dat vlak gelegen punt. Dit punt M heet middelpunt.

Onder een cirkel verstaat men ook wel het deel van een plat vlak dat door een cirkelomtrek wordt begrensd.

De afstand van een punt van de cirkelomtrek tot het middelpunt heet de straal van de cirkel. Alle stralen van een cirkel zijn even groot.

We tekenen een cirkel met behulp van een passer.

Een rechte lijn die twee punten van een cirkel verbindt, heet koorde (fig. 20,1 de lijn AB).

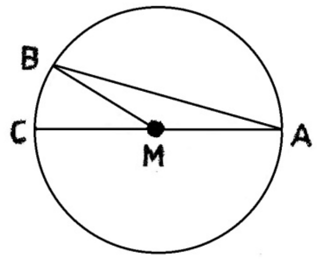


Fig. 20,1.

Een koorde, die door het middelpunt M gaat, heet middellijn (bv. de lijn AC).
Een middellijn is tweemaal zo lang als een straal. Alle middellijnen zijn dus ook even groot.
Een deel van een cirkelomtrek heet cirkelboog kortweg boog.

Eigenschap 1. Elke middellijn is groter dan een koorde, die niet door het middelpunt gaat.
Gegeven: $AC > AB$ (fig. 20,1).

Bewijs: Elke middellijn is gelijk aan de som van twee stralen, dus $AC = AM + BM$.
In $\Delta\, ABM$ is $AM + BM > AB$, dus is ook $AC > AB$.

Eigenschap 2. Wanneer de afstand van de middelpunten van twee cirkels kleiner is dan de som van de stralen en groter dan het verschil, dan hebben die cirkels twee punten gemeen.

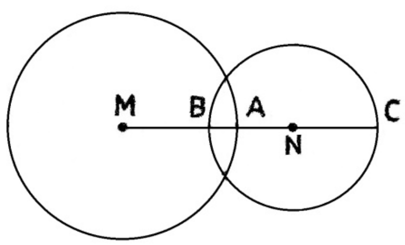


Fig. 20,2.

Gegeven: $MN < MA + NB$;
$MN > MA - MB$ (fig. 20,2).
Te bewijzen: cirkel M snijdt cirkel N in twee punten.

Bewijs:
$MN < MA + NB$
$\underline{NB = \quad\quad NB}$ afgetrokken
$MB < MA$

Hieruit volgt, dat het punt B binnen de cirkelomtrek M ligt.

Ook is:
$MN > MA - NB$
$\underline{NC = \quad\quad NB}$ opgeteld:
$MC > MA$

Hieruit volgt dat het punt C buiten de cirkelomtrek M ligt.
Men kan geen lijn van een punt B binnen de cirkelomtrek M naar een punt buiten de cirkelomtrek M trekken, zonder dat deze lijn de omtrek van cirkel M snijdt. De punten B en C liggen op de omtrek van cirkel N. De cirkel N moet dus de cirkel M snijden. Dit snijpunt moet buiten de middellijn BC liggen. Uit de symmetrie volgt dat er dan twee snijpunten zijn, een boven en een beneden de lijn MN.

20,2. Grondconstructies

Onder het construeren van een meetkundige figuur verstaan we het samenstellen van een figuur, uitsluitend met behulp van passer en liniaal. Een aantal vrij eenvoudige constructies, waarbij een lijn of een hoek wordt geconstrueerd, die aan bepaalde voorwaarden voldoet, noemen we grondconstructies. Andere constructies worden altijd tot een of meer van deze grondconstructies teruggebracht.

Grondconstructie 1. Een hoek te construeren van gegeven grootte als het hoekpunt en een been gegeven zijn.

Gegeven: $\angle A$, het hoekpunt P en het been PQ.

Gevraagd: Een hoek te construeren gelijk $\angle A$, waarvan P het hoekpunt is en PQ een been.

Constructie: (fig. 20,3). Beschrijf met de passer een cirkelboog met A als middelpunt en met een willekeurige straal, die de benen van $\angle A$ in de punten B en C snijdt.
Beschrijf met dezelfde passeropening, (dus met dezelfde straal) een cirkelboog QR met P als middelpunt. Beschrijf met Q als middelpunt en de koorde BC als straal een cirkelboogje, dat de boog QR in S snijdt.
Verbind S met P. Nu is PS het andere been van de gevraagde hoek.
De gevraagde hoek is SPQ.
Bewijs: Verbindt men S met Q, dan zijn de driehoeken BAC en QPS congruent; $AB = PQ$ $AC = PS$; $BC = QS$; de driehoeken hebben dus de drie zijden gelijk. Hieruit volgt $\angle A = \angle P$.

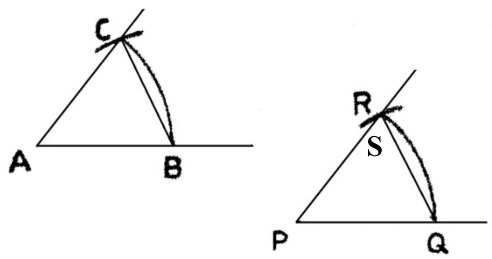


Fig. 20,3.

Grondconstructie 2. Door een gegeven punt buiten een gegeven lijn een lijn te trekken evenwijdig aan de eerste

Gegeven: Het punt P en de lijn AB (fig. 20,4).
Gevraagd: Door P een lijn te trekken $//AB$.
Constructie: Twee lijnen zijn evenwijdig, als ze zodanig door een derde lijn worden gesneden, dat bv. twee verwisselende binnenhoeken gelijk zijn. Verbind P met een willekeurig punt C van de lijn AB. Construeer nu $\angle DPC = \angle BCP$ (grondconstructie 1). Dan is $DP//AB$.

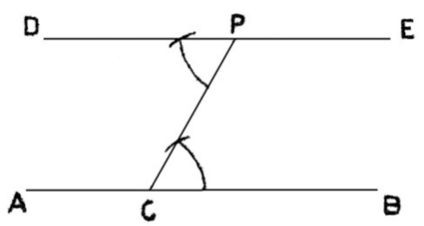


Fig. 20,4.

Grondconstructie 3. Een gegeven hoek middendoor te delen.

Gegeven: $\angle ABC$ (fig. 20,5).
Gevraagd: De bissectrix van $\angle ABC$.
Constructie: Zet (met de passer) op de benen van $\angle ABC$ twee willekeurige, maar gelijke stukken BD en BE af. Beschrijf met dezelfde of een andere passeropening twee gelijke cirkelboogjes met D en E als middelpunt, die elkaar in F snijden. De lijn BF is de gevraagde bissectrix.

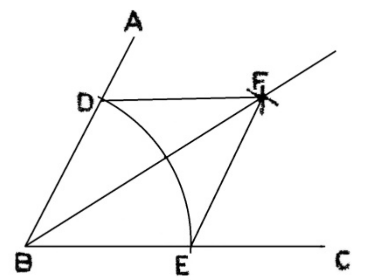


Fig. 20,5.

Bewijs: Trek DF en EF. De driehoeken BDF en BEF hebben gelijke zijden en zijn dus congruent. Dus $\angle DBF = \angle EBF$.

Oplossingen inzenden van de opgaven 108 t/m 112.

21,1. Het construeren van figuren (vervolg)

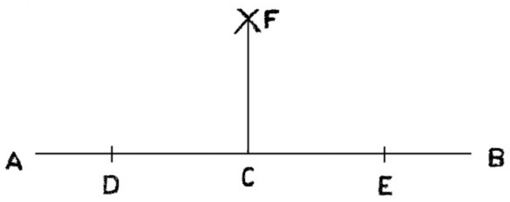


Fig. 21,1.

Grondconstructie 4.

In een gegeven punt van een lijn een loodlijn op te richten.
Gegeven: De lijn AB en het punt C op deze lijn (fig. 21,1).
Gevraagd: In het punt C een loodlijn op te richten.
Constructie: De opgave is: de gestrekte hoek ABC middendoor te delen. De constructie en het bewijs verlopen op dezelfde wijze als bij constructie 3 van de vorige les.

Grondconstructie 5. Een lijn van gegeven lengte loodrecht middendoor te delen.

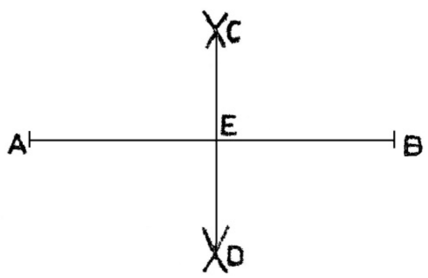


Fig. 21,2.

Gegeven: De lijn AB (fig. 21,2).
Gevraagd: AB loodrecht middendoor te delen.
Constructie: Beschrijf twee cirkelboogjes met $A\ en\ B$ als middelpunt en met gelijke , doch willekeurige straal, die elkaar in C snijden (de straal moet groter zijn dan de helft van AB). Beschrijf eveneens twee met A en B als middelpunt en dezelfde of een andere straal als voor het punt C, die elkaar aan de andere zijde van AB in D snijden. De lijn CD deelt nu AB loodrecht middendoor.

Bewijs: $\Delta\, ABC$ is gelijkbenig, dus $\angle CAB = \angle CBA$. $\Delta\, ACD$ en $\Delta\, BCD$ hebben drie zijden gelijk; ze zijn dus congruent. Hieruit volgt: $\angle ACD = \angle BCD$. Nu is $\Delta\, ACE \cong \Delta\, BCE$, want ze hebben een zijde en de beide aanliggende hoeken gelijk. Hieruit volgt: $AE = EB$ en $\angle AEC = \angle BEC = 90°$ (want ze zijn samen 180°). De lijn CD deelt dus de lijn AB loodrecht middendoor.

Opmerking: Gewoonlijk neemt men voor het bepalen van $C\ en\ D$ dezelfde straal; dan behoeft men maar twee cirkelbogen te trekken (fig. 21,3a). Men kan ook het punt D aan dezelfde kant van de lijn AB nemen als het punt D. (fig. 21,3b). Dit wordt gedaan, als het ongewenst of onmogelijk is aan de andere zijde van AB iets te tekenen.

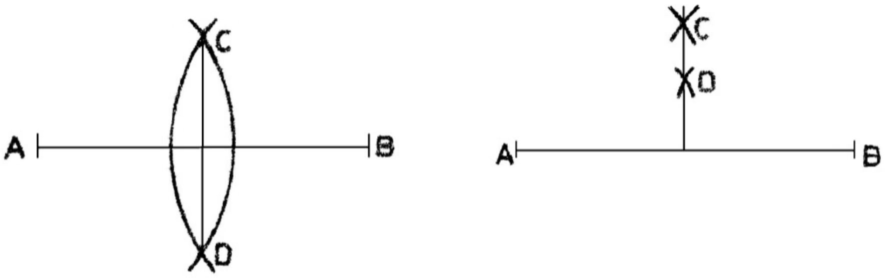


Fig. 21,3. **a** **b**

<u>Grondconstructie 6.</u> Uit een punt buiten een lijn een loodlijn op die lijn neer te laten.

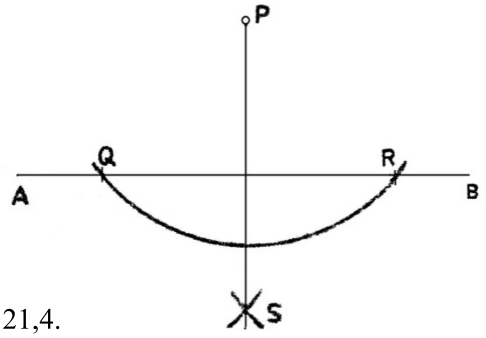


Fig. 21,4.

<u>Gegeven:</u> Het punt P en de lijn AB.
<u>Gevraagd</u>: Door P een lijn te trekken die loodrecht op AB staat.
Constructie: Beschrijf met P als middelpunt een cirkelboog, die de lijn AB in de punten Q en R snijdt. Beschrijf twee cirkelboogjes met gelijke stralen en Q en R als middelpunten, die elkaar in S snijden.
De lijn PS is de gevraagde lijn.
<u>Bewijs:</u> Het bewijs komt overeen met dat van grondconstructie 5.

<u>21,2.</u> <u>Het construeren van driehoeken.</u>

Met de vijf congruentiegevallen van driehoeken komen vijf grondconstructies van driehoeken overeen. Als van een driehoek drie elementen gegeven zijn, waarbij minstens één zijde, kunnen we de driehoek construeren.

<u>Constructie 1.</u> Een driehoek te construeren, waarvan één zijde en de twee aanliggende hoeken zijn gegeven.

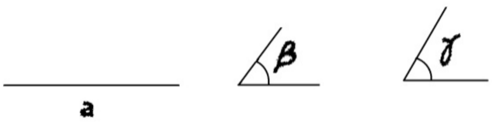


Fig. 21,5.

<u>Gegeven:</u> De zijde a en de hoeken β en γ (fig. 21,5).
<u>Gevraagd:</u> Een driehoek te construeren waarvan a een zijde en β en γ de beide aanliggende hoeken zijn.
<u>Constructie:</u> We tekenen een lijn $BC = a$ (fig.21,6) en construeren in de uiteinden de hoeken β en γ. De benen van deze hoeken snijden elkaar in A. Nu is $\Delta\ ABC$ de gevraagde driehoek.

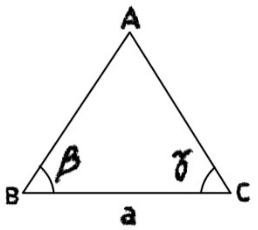


Fig. 21,6.

<u>Constructie 2.</u> Een driehoek te construeren, waarvan één zijde, één aanliggende en één overstaande hoek zijn gegeven.

Fig. 21,7.

<u>Gegeven:</u> De zijde a en de hoeken α en β (fig. 21,7).
<u>Gevraagd:</u> Een driehoek te construeren, waarvan a een zijde is, β een aanliggende en α de overstaande hoek.
<u>Constructie:</u> We construeren de hoek α en β door $\angle\beta$ naast $\angle\alpha$ te leggen.
Nu is $\angle\gamma$ het supplement van $\angle\alpha + \angle\beta$ (fig. 21,8).
Nu is de constructie tot de vorige teruggebracht.

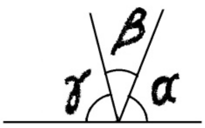


Fig. 21,8.

Oplossingen inzenden van de opgaven 113 t/m 118.

Constructie 3. Een driehoek te construeren, waarvan twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven.
Gegeven: De zijden a en b en de hoek γ (fig. 22,1).
Gevraagd: Een driehoek te construeren, waarvan a en b zijden zijn en waarbij $\angle\gamma$ de ingesloten hoek is.
constructie: Teken een hoek $C = \gamma$ en pas op het ene been een stuk $CA = b$ af (fig. 22,2). Verbind A en B. Nu is $\Delta\, ABC$ de gevraagde driehoek.

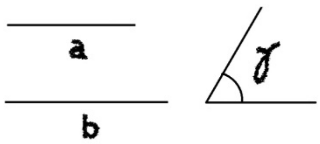


Fig. 22,1.

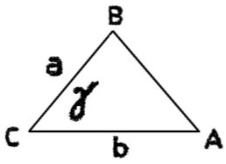


Fig. 22,2.

Constructie 4. Een driehoek te construeren, waarvan de drie zijden zijn gegeven.
Gegeven: De lijnen a, b en c (fig. 22,3).
Gevraagd: Een driehoek te construeren, waarvan a, b en c de zijden zijn.
Constructie: Trek een lijn BC gelijk aan de gegeven lijn a (fig. 22,4). Beschrijf met C als middelpunt een cirkelboogje met b als straal en met B als middelpunt een cirkelboogje met c als straal. Verbind het snijpunt $A\ met\ B$ en C; nu is $\Delta\, ABC$ de gevraagde driehoek.
Discussie a: De cirkels snijden elkaar ook nog in een punt A' beneden de lijn BC. Doch de driehoek $A'BC$ is congruent met $\Delta\, ABC$.
b: De constructie is alleen mogelijk, als ieder der gegeven zijden kleiner is dan de som en groter dan het verschil der beide andere. Is dit niet het geval, dan snijden de cirkelbogen elkaar niet en bestaat het punt A niet.

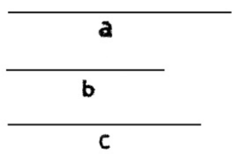


Fig. 22,3

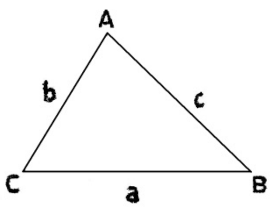


Fig. 22,4.

Constructie 5a: Een driehoek te construeren, waarvan twee zijden zijn gegeven en de hoek tegenover de kleinste van de twee.
Gegeven: De lijnen a en b $(a < b)$ en de hoek α (fig. 22,5).
Gevraagd: Een driehoek te construeren, waarvan a en b zijden zijn en α de hoek tegenover a.
Constructie: Teken een hoek $DAE = \alpha$. Pas op het been AD een stuk $AC = b$ af. Beschrijf met C als middelpunt een cirkelboog met a als straal. Deze snijdt het been AE in twee punten: B en B'.
Verbind C met B'. De beide driehoeken ABC en $AB'C$ voldoen aan het gevraagde (fig. 22,6).
Discussie: Is a groter dan de loodlijn CF uit C op AE neergeLaten, dan voldoen twee driehoeken; is a gelijk aan deze loodlijn, dan voldoet één driehoek, die rechthoekig is in B; is a kleiner dan deze loodlijn, dan voldoet geen enkele driehoek.

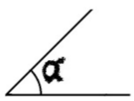


Fig. 22,5.

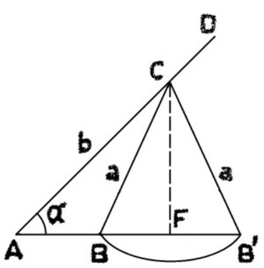


Fig. 22,6.

<u>Constructie 5b.</u> Een driehoek te construeren, waarvan twee zijden zijn gegeven en de hoek tegenover de grootste van die twee.

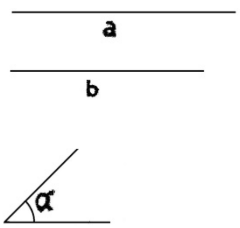


Fig. 22,7.

<u>Gegeven:</u> De lijnen a en b ($a > b$) en de hoek α (fig. 22,7).
<u>Gevraagd:</u> Een driehoek te construeren, waarvan a en b zijden zijn en α de hoek tegenover a.
<u>Constructie:</u> (fig.22,8). Teken een hoek $DAE = \alpha$.
Pas op het been AD een stuk $AC = b$ af. Beschrijf met C als middelpunt een cirkelboog met a als straal.
Deze snijdt het been AE in een punt B.
Verbind C en B. Nu is $\Delta\, ABC$ de gevraagde driehoek.

<u>Discussie:</u> De cirkelboog snijdt het verlengde van AE nog in een punt B'. De driehoek CAB' voldoet echter niet; $B'AC$ is het supplement van de gegeven hoek α.
Is $\angle\alpha = 90°$. Dan voldoet $\Delta\, B'AC$ wel, doch deze driehoek is in dit geval congruent met $\Delta\, ABC$.

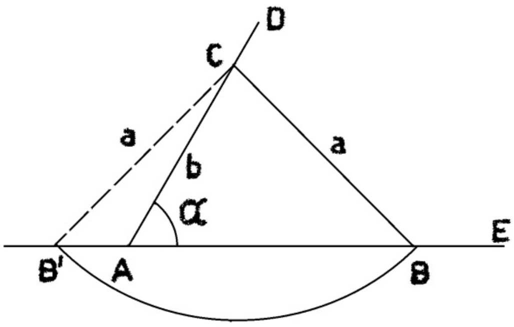


Fig. 22,8.

<u>Opmerkingen.</u>

1. De constructies $5a$ en $5b$ komen overeen met het 5e congruentiegeval. Daar was de beperking gemaakt: “mits de hoek tegenover de andere zijde van dezelfde soort is”. Uit de constructies $5a$ en $5b$ blijkt dat deze beperking niet nodig is als de gegeven hoek tegenover de grootste der twee gegeven zijden ligt, omdat met de gegevens van constructie $5a$ er twee driehoeken zijn, die voldoen.

2. Uit de voorgaande constructies blijkt, dat er voor het construeren van een driehoek drie onderling onafhankelijke gegevens nodig zijn, evenals er drie onderling onafhankelijke gelijke elementen moeten zijn voor de congruentie van twee driehoeken.

   Bij slechts twee gegevens zijn er oneindig veel driehoeken, die voldoen, omdat men dan een derde gegeven willekeurig kan aannemen.
   De constructie is dan <u>onbepaald</u>.

   Zijn er vier (of meer) gegevens, dan kan de driehoek reeds met drie ervan worden geconstrueerd. Het zou dan al zeer toevallig zijn, als de driehoek ook met het vierde gegeven overeenkomt. In het algemeen is de constructie dus niet mogelijk, als er vier of meer gegevens zijn.

Oplossingen inzenden van de opgaven 119 t/m 123.

23,1. Constructie met behulp van een meetkundige analyse

Soms kan uit de gegevens de figuur niet onmiddellijk worden samengesteld. Men tracht dan uit de gevraagde figuur een andere af te leiden die met behulp van de gegevens kan worden geconstrueerd en leidt uit deze figuur de gevraagde figuur af. Men noemt dit construeren met behulp van een meetkundige analyse.

Hier volgen enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1. Een driehoek te construeren, waarvan de basis, de kleinste basishoek en het verschil van de opstaande zijden gegeven zijn.

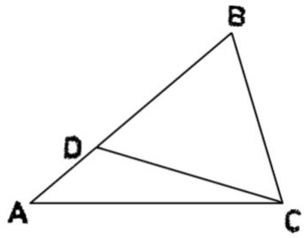


Fig. 23,1.

Analyse: Is $\Delta\, ABC$ (fig.23,1) de gevraagde, dan is, als $BD = BC$, het stuk AD het gegeven verschil van de opstaande zijden.
We verbinden D met C. Van $\Delta\, ACD$ is nu gegeven: de zijden AC en AD en de ingesloten hoek DAC. Deze driehoek kan dus worden geconstrueerd. Verlengen we nu AD en construeren we $\angle DCB = \angle CDB$, dan wordt de gevraagde driehoek gevonden.

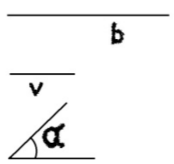


Fig.23,2.

Gegeven: De lijnen b en v en de hoek α (fig. 23.2).
Gevraagd: Een driehoek te construeren waarvan b de basis, v het verschil van de opstaande zijden en α de kleinste basishoek is.
Constructie: (fig. 23,3). Teken de hoek α en pas op het ene been een stuk $AB = b$ af en op het andere been een stuk $AD = v$.
Verbind D en C. Construeer $\angle DCB = \angle CDB$.
$\Delta\, ABC$ is nu de gevraagde driehoek.

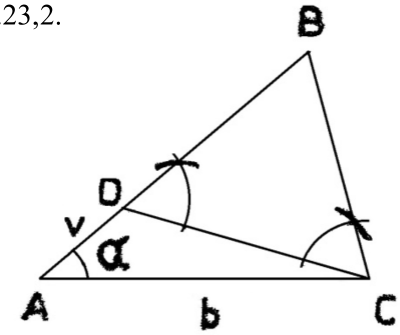


Fig. 23,3.

Voorbeeld 2. Een driehoek te construeren waarvan de omtrek en twee hoeken zijn gegeven.
Analyse. Onderstel, dat ABC de gevraagde driehoek is (fig. 23,4).Verlengt men AB aan de ene zijde met een stuk $AD = AC$ en aan de andere zijde met een stuk $BE = BC$ en verbinden we D met E, dan ontstaat de driehoek DEC. Deze kunnen we construeren. De basis is gegeven: $\angle C = ½\, \angle CAB,\ \angle E = ½\, \angle CBA$.
Uit $\Delta\, DEC$ kunnen we de gevraagde driehoek afleiden. $\Delta\, CDA$ is gelijkbenig. Delen we de basis DC loodrecht middendoor, dan gaat de deellijn door de top A. Eveneens gaat de middelloodlijn van CE door B.

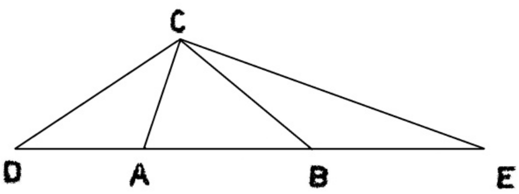


Fig. 23,4.

Gegeven: De lijn $2s$ en de hoeken α en β (fig. 23,5).
Gevraagd: Een driehoek te construeren, waarvan de omtrek $2s$ is en waarvan α en β twee hoeken zijn.

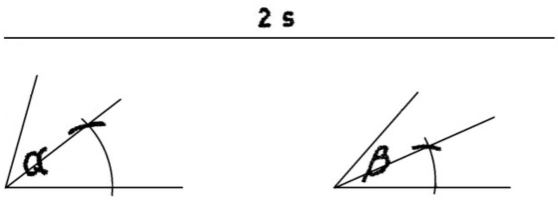


Fig. 23,5.

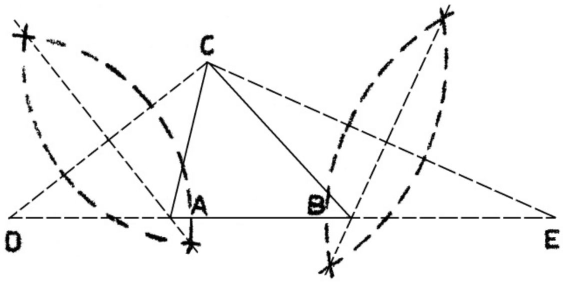


Fig. 23,6.

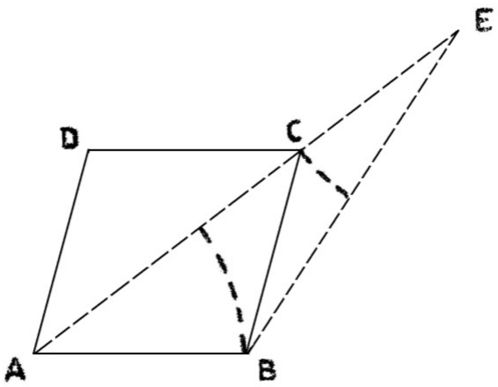


Fig. 23,7.

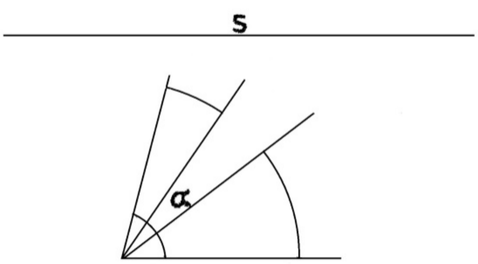


Fig. 23,8.

Constructie: (fig.23,6). Trek de lijn $DE = 2s$ en construeer in de uiteinden hoeken gelijk aan ½ α en ½ β. Daardoor ontstaat $\Delta\, DEC$. Deel nu DC en EC loodrecht middendoor. De loodlijnen snijden DE in A en B. $\Delta\, ABC$ is dan de gevraagde.

23,2. Het construeren van veelhoeken

Een veelhoek kunnen we beschouwen als opgebouwd uit driehoeken. Moeten we een veelhoek construeren, dan trachten we de driehoeken te construeren waaruit de veelhoek is opgebouwd.

Voorbeeld: Construeer een ruit, als een scherpe hoek, de som van een diagonaal en een zijde gegeven zijn.
Analyse: Een ruit (fig. 23,7) wordt door de diagonaal AC in twee congruente driehoeken verdeeld. We verlengen AC met een stuk $CE = CB$. Nu is $AE =$ de som van een diagonaal en een zijde. Van de driehoek ABE zijn bekend: $AE, \angle EAB =$ ½ $\angle DAB$ en $\angle CEB =$ $=$ ½ $\angle ACB =$ ¼ $\angle DAB$. We kunnen de driehoek ABE dus construeren:
één zijde, nl. AE is gegeven, alsmede de beide aanliggende hoeken. Uit $\Delta\, ABE$ kunnen we de ruit afleiden.

Gegeven: De lijn s en de hoek α (fig. 23,8).
Gevraagd: Een ruit te construeren, waarvan α een scherpe hoek is en s de som van een diagonaal en een zijde.
Constructie: We tekenen de rechte lijn AE (fig. 23,7) en construeren in het ene uiteinde een hoek $EAB =$ ½ α, in het andere uiteinde een hoek $AEB =$ ¼ α. Daarmee is de driehoek ABE verkregen. We beschrijven nu een cirkelboog met B als middelpunt en BA als straal. De s snijdt AE in een punt C. Met A en C als middelpunt beschrijven we ook cirkelboogjes met BA als straal. Deze snijden elkaar in D. We trekken nu AD en CD, waarmee de ruit is voltooid.

Oplossingen inzenden van de opgaven 126 t/m 130.

R.T.
Vl. M.

HILVERSUM

Evenredigheid van lijnen

24,1. Verhouding van lijnen

Meet men een lijn van 32 cm en een lijn van 24 cm met een lijn van 1 cm, dan blijkt, dat deze maat op de eerste lijn 32 keer en op de tweede lijn 24 keer begrepen is. Meet men met een maat van 2 cm, dan vindt men 16 en 12 keer; meet men met een maat van 4 cm, dan vindt men 8 en 6 keer. De verhouding van de lengten der beide lijnen kunnen we schrijven als $32: 24$ (32 staat tot 24) of als $16: 12$ of als $8 : 6$ of als $4 : 3$.

De beide gevallen noemen we de termen van de verhouding; het eerste getal heet de eerste of voorgaande term; het tweede getal heet de tweede of volgende term.
Het quotiënt der termen noemen we het verhoudingsgetal; in ons voorbeeld is dit $\frac{4}{3}$.

Dit verhoudingsgetal kan een geheel getal zijn, nl. als de ene lijn juist een geheel aantal malen op de andere kan worden afgepast. Ook kan het best een breuk zijn, zoals in bovenstaand voorbeeld. Dan is er een kleinere maat, die op ieder der lijnen een geheel aantal malen kan worden afgepast..

Twee verhoudingen heten gelijk, als het verhoudingsgetal hetzelfde is.
Hieruit volgt dat een verhouding niet verandert, als we beide termen door eenzelfde getal delen of met eenzelfde getal vermenigvuldigen.

24,2. Evenredigheid van lijnen

Eigenschap 1. Als enige evenwijdige lijnen van een snijlijn gelijke stukken afsnijden, dan snijden ze van elke andere snijlijn gelijke stukken af.

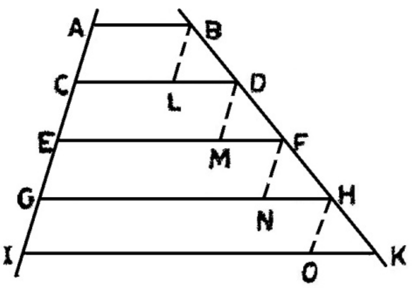


Fig. 24,1.

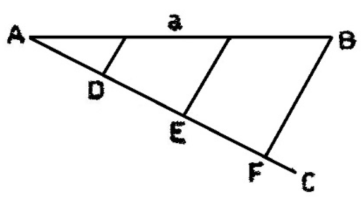


Fig. 24,2.

Gegeven: $AB//CD//EF//GH//IK$;
$AC = CE = EG = GI$ (fig. 24,1).
Te bewijzen: $BD = DF = GH = HK$.
Bewijs: Als we moeten bewijzen dat lijnen gelijk zijn, Trachten we altijd deze lijnen in congruente driehoeken te verkrijgen. Daartoe trekken we vanuit B, D, F, H lijnen evenwijdig aan de lijn AI.
Daardoor ontstaan vier parallellogrammen.
In een parallellogram zijn de overstaande zijden gelijk, dus $BL = AC, DM = CE, FN = EG, HO = GI$.
Doch daar $AC = CE = EG = GI$, is ook $BL = DM = = FN = HO$.
Bovendien is: $\angle LBD = \angle MDF = \angle NFH = \angle OHK$ en $\angle LDB = \angle MFD = \angle NHF = \angle OKH$.
Gevolg: Met behulp van deze eigenschap kunnen we een lijn in een aantal gelijke delen verdelen. Om bv. de lijn AB (fig. 24,2) in drie gelijke delen te verdelen trekken we een lijn AC. Hierop passen we vanuit A drie gelijke stukken af: $AD = DE = EF$.
We verbinden F met B en trekken door E en D lijnen evenwijdig aan FB. Deze lijnen verdelen dan AB in drie gelijke delen.

Eigenschap 2. Als drie evenwijdige lijnen worden gesneden door twee andere lijnen, dan is de verhouding van de stukken op de ene snijlijn gelijk aan de verhouding van de stukken op de andere snijlijn.

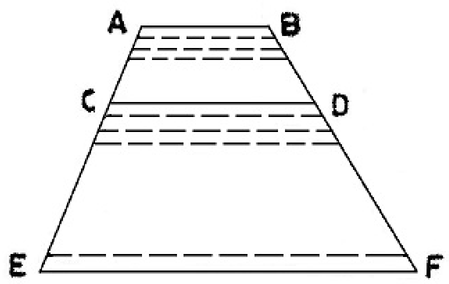


Fig. 24,3.

Gegeven: $AB//CD//EF$ (fig. 24,3).
Te bewijzen: $AC:CE = BD:DF$.
Bewijs: Om de verhouding van AC tot CE te bepalen moeten we beide lijnen met dezelfde maat meten. We kiezen hiertoe een klein lijnstukje dat we op EC afpassen zo vaak als het gaat. Eveneens passen we het op CA af. Onderstel, dat het op AC a maal gaat en op CE b maal. Door al de deelpunten, die daarbij ontstaan, trekken we lijnen evenwijdig aan AB. Deze lijnen snijden van BD a gelijke stukken af en van DF b even grote stukken. Dit betekent:
$AC : CE = a : b$ en $BD : DF = a : b$. Hieruit volgt: $AC : CE = BD : DF$.
Deze eigenschap wordt de hoofdeigenschap van de evenredigheid van lijnen genoemd.

De gelijkheid van twee verhoudingen noemen we een evenredigheid. De verschillende eigenschappen, die in de rekenkunde gelden voor evenredigheden, gelden ook hier. Zo volgt uit de evenredigheid $AC : CE = BD : DF$ o.a. $AC : BD = CE : DF$ (de middelste termen verwisseld); $AE : BF = AC : BD$ en $AE : BF = CE : DF$ (de som van de termen van de eerste verhouding staat tot de som van de termen van de tweede verhouding als de eerste term staat tot de derde, of als de tweede term staat tot de vierde).

Eigenschap 3. Als drie lijnen, waarvan er twee evenwijdig zijn door twee andere lijnen zo worden gesneden, dat de stukken op de ene snijlijn evenwijdig zijn met de gelijk gelegen stukken op de andere, dan loopt ook de derde evenwijdig met de eerste twee.

Deze eigenschap is de omgekeerde van de hoofdeigenschap (eigenschap 2).

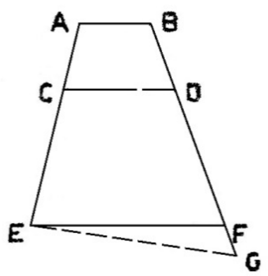


Fig. 24,4.

Gegeven: $AB//CD$; $AC : CE = BD : DF$ (fig. 24,4).
Te bewijzen: $EF//AB//CD$.
Bewijs: Was EF niet evenwijdig aan AB en CD, dan zou men door E een andere lijn kunnen trekken, evenwijdig aan CD, die BD niet in F maar bv. in G snijdt. Dan zouden we drie evenwijdige lijnen hebben, AB, CD en EG, gesneden door AE en BG. Volgens eigenschap 2 is dan:

$$AC : CE = BD : DG.$$

Doch er is ondersteld: $AC : CE = BD : DF$.
Deze twee evenredigheden hebben drie overeenkomstige termen gelijk, de vierde termen zijn dus ook gelijk, dus: $DG = DF$, d.w.z. G moet met F samenvallen. Derhalve: EF is evenwijdig aan AB en CD.

Opmerking: We maken bij de evenredigheid van lijnen vaak gebruik van verschillende eigenschappen der evenredigheden. Zo ook van de eigenschap:
In een evenredigheid is het product van de uiterste termen gelijk aan dat van de middelste.
Hierbij verstaan we onder het product van twee lijnen het product van de getallen, die aanwijzen, hoeveel maal een bepaalde lengte-eenheid op elk van de twee lijnen is begrepen. Zo volgt uit:
$AC: CE = BD: DF$ (fig. 24,4).
$AC \times DF = CE \times BD$, dus: $DF = \frac{CE \times BD}{AC}$. Is bv. $AC = 12\ mm,\ CE = 27\ mm,\ BD = 15\ mm,$
dan is $DF = \frac{27 \times 15}{12} = 33\frac{3}{4}\ mm.$

Oplossingen inzenden van de opgaven 131 t/m 134.

25,1. Evenredigheid van lijnen in een driehoek

Eigenschap 1. Een lijn evenwijdig aan een zijde van een driehoek verdeelt de andere zijden of zijn verlengden in evenredige stukken.

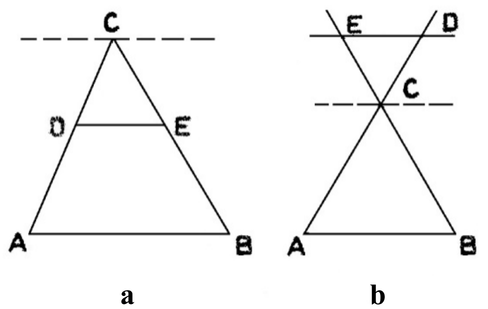


Fig. 25,1.

Gegeven: $DE//AB$ (fig. 25,1).
Te bewijzen: $AD : DC = BE : EC$.
Bewijs: Trek door de top C van de driehoek een lijn evenwijdig aan AB. Dan hebben we drie evenwijdige lijnen, door twee lijnen gesneden. Volgens les 24, eigenschap 2, worden door de drie evenwijdige lijnen van de twee snijlijnen evenredige stukken afgesneden. Hieruit volgt: $AD : DC = BE : EC$. Dit geldt zowel voor fig. 25,1a als voor 25,1b. Door eigenschappen van de evenredigheden toe te passen, kunnen we deze evenredigheid in verschillende vormen brengen:
$AD : DC = BE : EC$, $AC : BC = AD : BE$,
$AC : BC = DC : EC$, $AC : AD = BC : BE$,
$AC : DC = BC : EC$.

Eigenschap 2. Als een lijn twee zijden van een driehoek of zijn verlengden in evenredige stukken verdeelt, dan loopt hij evenwijdig aan de derde zijde.

Deze eigenschap is de omgekeerde van eigenschap 1. Op overeenkomstige wijze als eigenschap 1, volgt uit les 24 eigenschap 2, volgt deze uit les 24 eigenschap 3.

Eigenschap 3. De lijn, die in een driehoek evenwijdig loopt aan een zijde, verhoudt zich tot die zijde als het niet tussen de evenwijdige lijnen gelegen stuk van een andere zijde staat tot die andere zijde.

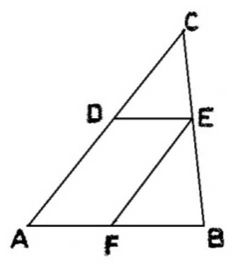


Fig. 25,2.

Gegeven: $DE//AB$ (fig. 25,2).
Te bewijzen: $DE : AB = DC : AC$.
Bewijs: Trek $EF//CA$. Nu is $FA : BA = EC : BC$. Daar $DE//AB$ en $EF = DA$, is $ADEF$ een parallellogram, dus is $AF = DE$, dus: $DE : AB = EC : BC$. Doch $EC : BC =$ $= DC : AC$, dus: $DE : AB = DC : AC = EC : BC$.
Deze gelijkheid van drie verhoudingen noemen we een aaneengeschakelde evenredigheid.

Gelijkvormigheid van driehoeken

25,2. Definitie van gelijkvormige driehoeken

In hoofdstuk 25,1, eigenschap 3. (fig. 25,2) hebben we afgeleid dat een lijn DE evenwijdig aan de basis van een driehoek ABC, een kleinere driehoek DEC afsnijdt, waarvan de zijden een aaneengeschakelde evenredigheid vormen met de zijden van de oorspronkelijke driehoek. De zijden van de ene driehoek vormen de voorgaande, die van de tweede de volgende termen van de evenredigheid.

Twee driehoeken, waarvan de zijden van de eerste de voorgaande, die van de tweede, noemen we gelijkvormige driehoeken.

De zijden, die hierbij de termen van een verhouding vormen, heten gelijkstandige zijden. De hoeken en hoekpunten tegenover gelijkstandige zijden gelegen, heten gelijkstandige hoeken en gelijkstandige hoekpunten. In plaats van het woord ‘gelijkvormig’ gebruikt men het teken ∼ (‘congruent’ betekent gelijk en gelijkvormig, aangeduid door ≅).

R.T.

50 Vl. M. Nadruk verboden

25,3. De gelijkvormigheidsgevallen

Gelijkvormigheidsgeval 1. Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee hoeken gelijk hebben.

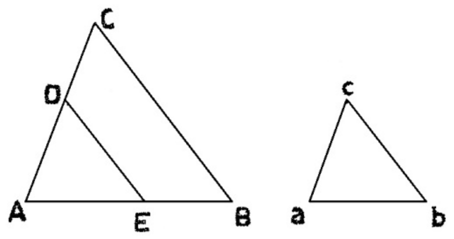


Fig. 25,3.

Gegeven: $\angle A = \angle a$; $\angle B = \angle b$ (fig. 25,3).
Te bewijzen: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, abc$.
Bewijs: We passen op AC een stuk $AD = ac$ af en trekken door D een lijn $DE // CB$.
Dan is $\Delta\, ABC \sim \Delta\, AED$, zodat $AB : AE = BC : ED = = CA : DA$. . . . . (1).
Verder is $AD = ac$; $\angle A = \angle a$;
$\angle AED = \angle B = \angle b$. De driehoeken AED en abc hebben dus een zijde, een aanliggende en een overstaande hoek gelijk; ze zijn dus congruent.
We mogen dus in de aaneengeschakelde evenredigheid (1) de zijden van $\Delta\, AED$ vervangen door die van $\Delta\, abc$, zodat $AB : ab = BC : bc = CA : ca$.
De driehoeken ABC en abc zijn dus gelijkvormig.

Gelijkvormigheidsgeval 2. Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee zijden evenredig en de ingesloten hoek gelijk hebben.
Gegeven: $AB : ab = AC : ac$; $\angle A = \angle a$ (fig. 25,3).
Te bewijzen: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, abc$.
Bewijs: We nemen weer op AC een stuk $AD = ac$. We trekken $DE // CB$.
Nu is $\Delta\, ABC \sim \Delta\, AED$, evenals in het vorige geval, zodat ook nu:

$$AB : AE = BC : ED = CA : DA \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

We vergelijken de eerste en de laatste verhouding:

$$AB : AE = CA : DA$$

Met de gegeven evenredigheid:

$$AB : ab = AC : ac.$$

Daar $AD = ac$ hebben deze beide evenredigheden drie termen gelijk, dus de vierde termen zijn ook gelijk, dus $AE = ab$. De driehoeken AED en abc hebben twee zijden en de ingesloten hoek gelijk; ze zijn dus congruent. In de evenredigheid (1) kunnen we nu de zijden van $\Delta\, AED$ vervangen door die van $\Delta\, abc$, zodat $AB : ab = BC : bc = CA : ca$, dus $\Delta\, ABC \sim \Delta\, abc$.

Gelijkvormigheidsgeval 3. Twee driehoeken zijn gelijkvormig als zij twee zijden evenredig en de hoeken over het grootste paar evenredige zijden gelijk hebben.
Gegeven: $AC : ac = CB : cb$; $CB > AC$; $ab > AC$; $\angle A = \angle a$ (fig. 25,3).
Te bewijzen: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, abc$.
Bewijs: We passen weer op AC een stuk $AD = ac$ af en trekken $DE // CA$.
Dan is weer $\Delta\, ABC \sim \Delta\, AED$ en geldt weer de aaneengeschakelde evenredigheid (1). We vergelijken nu de laatste twee verhoudingen hiervan:
$BC : ED = CA : DA$ met de gegeven evenredigheid $CB : cb = AC : ac$, dan blijkt, dat drie overeenkomstige termen gelijk zijn. De vierde termen zijn dan ook gelijk, dus $ED = cb$. De driehoeken AED en abc hebben nu twee zijden gelijk en de hoeken over het grootste paar gelijke zijden. Ze zijn dus congruent. We kunnen dus in de evenredigheid (1) de zijden van $\Delta\, AED$ vervangen door die van $\Delta\, abc$, waarna blijkt: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, abc$..

Oplossingen inzenden van de opgaven: 135 t/m 139.

R.T.
Vl. M.

26,1. Eigenschappen van gelijkvormige driehoeken

Eigenschap 1. In twee gelijkvormige driehoeken zijn de gelijkstandige hoeken gelijk.
Deze eigenschap is de omgekeerde van gelijkvormigheidsgeval 1 (les 25,3).

Gegeven: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, abc$ (fig. 25,3).

Te bewijzen: $\angle A = \angle a$; $\angle B = \angle b$; $\angle C = c$.

Bewijs: We nemen weer $AD = ac$ en trekken $DE // CB$. Dan is $\Delta\, ABC \sim \Delta\, AED$,
dus: $AB : AE = AC : AD = BC : ED$ . . . . (1)

Uit het ondersteld volgt:
$AB : ab = AC : ac = BC : bc$ . . . . (2)

Vergelijken we de eerste twee verhoudingen van (1) en (2), dan blijkt, dat hiervan drie termen gelijk zijn; de vierde termen zijn dus ook gelijk, nl. $AE = ab$.

Door de laatste twee verhoudingen van (1) en (2) te vergelijken, blijkt dat $ED = bc$.
De driehoeken AED en abc hebben nu gelijke zijden, zodat $\Delta\, AED \cong \Delta\, abc$.
Hieruit volgt: $\angle A = \angle a$; $\angle AED = \angle b$; maar $\angle AED = \angle B$ (overeenkomstige hoeken bij twee evenwijdige lijnen, gesneden door AB), dus $\angle B = \angle b$.
De driehoeken hebben nu de derde hoeken ook gelijk, dus $\angle C = \angle c$.

Eigenschap 2. In twee gelijkvormige driehoeken zijn twee gelijkstandige zwaartelijnen evenredig met twee gelijkstandige zijden.
Hetzelfde geldt voor de gelijkstandige hoogtelijnen en voor de gelijkstandige bissectrices.

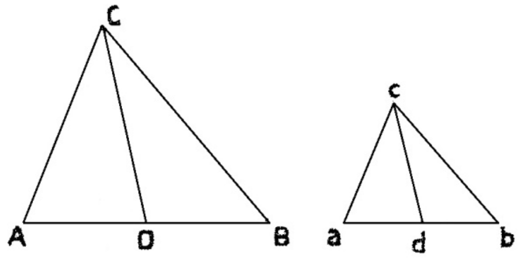


Fig. 26,1.

Gegeven: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, abc$;
$AD = DB$; $ad = db$ (fig. 26,1).

Te bewijzen: $CD : cd = AC : ac$.

Bewijs: Uit de gelijkvormigheid van $\Delta\, ABC$ en $\Delta\, abc$ volgt: $\angle A = \angle a$; $AC : ac = AB : ab$,
dus ook: $AC : ac = ½\, AB : ½\, ab = AD : ad$.
Van de driehoeken ACD en acd zijn twee zijden evenredig, terwijl ze de ingesloten hoek gelijk hebben.
Ze zijn dus gelijkvormig, zodat $CD : cd = AC : ac$.

Eigenschap 3. In twee gelijkvormige driehoeken verhoudt zich de som of het verschil van een zijde en een hoogtelijn van de ene driehoek tot de som of het verschil van de gelijkstandige lijnen van de andere driehoek als een paar gelijkstandige zijden.
Deze eigenschap volgt onmiddellijk uit de vorige, door toepassing van een eigenschap der evenredigheden: uit $a : b = c : d$ volgt: $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$.

Voorbeeld. Twee driehoeken zijn gelijkvormig als twee zijden en de hoogtelijnen op een van deze zijden in de ene driehoek evenredig zijn met de overeenkomstige lijnen in de andere.

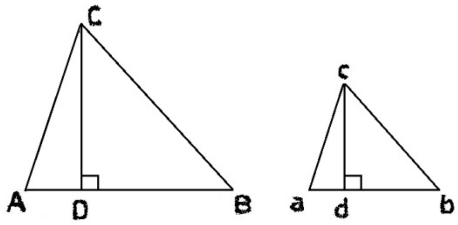


Fig. 26,2.

Gegeven: $AC : ac = AB : ab = CD : cd$;
$CD \perp AB$;
$cd \perp ab$ (fig. 26,2).

Te bewijzen: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, abc$.

Bewijs: De rechthoekige driehoeken ACD en acd hebben de hypotenusa en een rechthoekszijde evenredig en zijn dus gelijkvormig (gelijkvormigheidsgeval 2). Hieruit volgt: $\angle A = \angle a$.
De driehoeken ABC en abc hebben dan twee zijden evenredig en de ingesloten hoek gelijk en dus gelijkvormig (gelijkvormigheidsgeval 2).

Voorbeeld 2. De diagonalen van een trapezium verdelen elkaar in stukken die evenredig zijn met de aangrenzende evenwijdige zijden.
Gegeven: $AB//DC$ (fig. 26,3).
Te bewijzen: $AS : SC = AB : DC$.
Bewijs: In de driehoeken ABS en CDS is $\angle SAB = \angle SCD$ en $\angle SBA = \angle SDC$ (verwisselende binnenhoeken), dus: $\Delta\, ABS \sim \Delta\, CDS$, waaruit volgt: $AS : SC = AB : DC$.

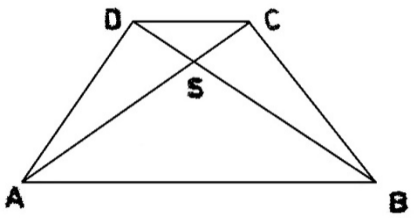


Fig. 26,3.

Stelling 1. De bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde in stukken, die evenredig zijn met de aangrenzende zijden.

Gegeven: $\angle CAD = \angle BAD$ (fig. 26,4).
Te bewijzen: $CD : BD = AC : AB$.
Bewijs: Verleng AD en trek door C een lijn $//AB$. Volgens de eigenschap van voorbeeld 2 is in het trapezium $ABEC$:

$$CD : BD = EC : AB.$$

Daar $\angle CEA = \angle BAE = \angle CAE$, is $\Delta\, AEC$ gelijkbenig, dus $AC = EC$. In laatstgenoemde evenredigheid kunnen we dus EC vervangen door AC, waarmee het gestelde is bewezen.

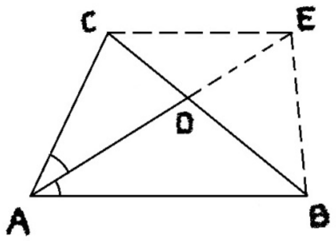


Fig. 26,4.

Stelling 2. De buitenbissectrice van een driehoek snijdt de overstaande zijde in een punt, waarvan de afstanden tot de uiteinden van die zijde zich verhouden als de aangrenzende zijden.

Gegeven: $\angle BCD = \angle ECD$ (fig. 26,5).
Te bewijzen: $DB : DA = CB : CA$.
Bewijs: Maak $\angle EDC = \angle BDC$. Nu is DC een binnenbissectrice van $\Delta\, ADE$.
Volgens de eigenschap van stelling 1 is nu:

$$AC : EC = AD : ED.$$

Maar $\Delta\, BCD \cong \Delta\, ECD$ (een zijde met de twee aanliggende hoeken gelijk), dus: $CE = CB$ en $DE = DB$. Substitueren we dit in de laatste evenredigheid, dan gaat deze, nadat we de termen in omgekeerde volgorde hebben geschreven, over in:

$$DB : DA = CB : CA.$$

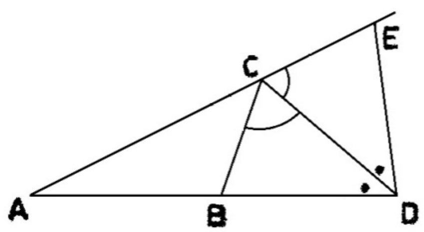


Fig. 26,5.

Opmerking: We zeggen dat de binnenbissectrice de overstaande zijde inwendig en de buitenbissectrice haar uitwendig verdeelt in stukken, die zich verhouden als de aangrenzende opstaande zijden.

Oplossingen inzenden van de opgaven 140 t/m 145.

HILVERSUM

Projecties

27,1. De projectie van een punt en van een lijn

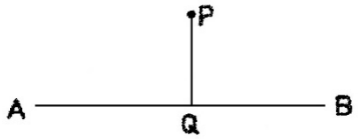


Fig. 27,1.

Laat men uit een punt P buiten een lijn AB de loodlijn neer op AB, heet het voetpunt Q van die loodlijn de projectie van P op AB (fig. 27,1).

Alle punten van de loodlijn PQ hebben dezelfde projectie Q. Het punt Q is zijn eigen projectie.

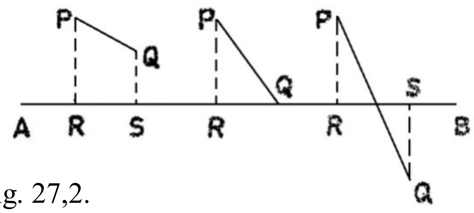


Fig. 27,2.

Onder de projectie van een lijn PQ op een lijn AB verstaan we de afstand van de projecties van de uiteinden P en Q op AB (fig. 27,2).

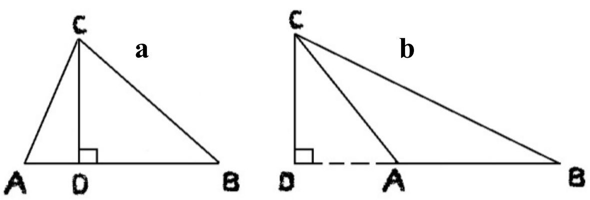


Fig. 27,3.

Trekt men in een driehoek uit een hoekpunt de hoogtelijn op de overstaande zijde, dan wordt deze verdeeld in twee stukken. Ieder stuk is de projectie van de aanliggende zijde. In fig. 27,3 is in beide getekende gevallen AD de projectie van AC en BD de projectie van BC op de basis AB.

27,2. Projectiestellingen in de rechthoekige driehoek

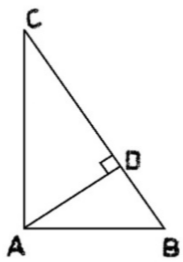


Fig. 27,4.

Eigenschap 1. In een rechthoekige driehoek is elke rechthoekszijde middelevenredig tussen haar projectie op de hypotenusa en de hypotenusa.

Gegeven: $\angle CAB = 90°$; $AD \perp BC$ (fig. 27,4).
Te bewijzen: $DB : AB = AB : BC$.
Bewijs: De driehoeken ABC en DBA zijn rechthoekig en hebben $\angle B$ gemeen; ze zijn dus gelijkvormig.

Daaruit volgt: $DB : AB = AB : BC$.

Opmerking: Passen we op deze evenredigheid de hoofdeigenschap der evenredigheden toe (het product der uiterste termen is gelijk aan het product der middelste), dan krijgen we: $AB^2 = BC \times BD$.
In woorden: Het kwadraat van de rechthoekszijde is gelijk aan haar projectie op de schuine zijde maal de schuine zijde.

Eigenschap 2. De som van de kwadraten van de rechthoekszijden is gelijk aan het kwadraat van de hypotenusa.

Deze eigenschap heet de stelling van Pythagoras.

Gegeven: $\angle CAB = 90°$; $AD \perp BC$ (fig. 27,4).
Te bewijzen: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Bewijs: Uit de opmerking bij eigenschap 1 volgt:

$$AB^2 = BD \times BC$$
$$\underline{AC^2 = CD \times BC} \quad \text{opgeteld:}$$
$$AB^2 + AC^2 = (BD + CD) \times BC, \text{ dus:}$$
$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Eigenschap 3. In een rechthoekige driehoek is de hoogtelijn op de hypotenusa middelevenredig tussen de stukken, waarin zij de hypotenusa verdeelt.

Gegeven: $\angle CAB = 90°$; $AD \perp BC$ (fig. 27,4).
Te bewijzen: $CD : AD = AD : BD$.
Bewijs: De lijnen die in het 'te bewijzen' voorkomen, zijn rechthoekszijden in de driehoeken ABD en CAB. In deze driehoeken is $\angle CAD = \angle ABD$, want beide hebben ze $\angle DAB$ tot complement. De driehoeken ABD en CAB hebben dus twee hoeken gelijk en zijn daarom gelijkvormig.
Hieruit volgt hetgeen dat bewezen moet worden.

Eigenschap 4. Het product van de hoogtelijn op de hypotenusa en de hypotenusa is gelijk aan het product van de rechthoekszijden.

Gegeven: $\angle CAB = 90°$; $AD \perp BC$ (fig. 27,4).
Te bewijzen: $AD \times BC = AB \times AC$.
Bewijs: $\Delta\, ABD \sim \Delta\, CBA$ (twee hoeken gelijk), dus de verhouding $AD : AB$ in $\Delta\, ABD$ is gelijk aan de verhouding $AC : BC$ in $\Delta\, CBA$, dus $AD : AB = AC : BC$, waaruit volgt: $AD \times BC = AB \times AC$.

Voorbeeld: De benen van een gelijkbenige driehoek zijn elk 20 cm lang, terwijl de basis 32 cm is. Bereken de hoogte.

Oplossing: De hoogtelijn verdeelt de basis in twee gelijke stukken, elk dus van 16 cm. Er ontstaan dan 2 congruente rechthoekige driehoeken, waarin we de stelling van Pythagoras toepassen.
Als de hoogte h is, vinden we:

$$20^2 = h^2 + 16^2$$
$$h^2 = 20^2 - 16^2$$
$$h^2 = 400 - 256 = 144$$
$$h = 12$$

De hoogte is dus 12 cm.

Oplossingen inzenden van de opgaven 146 t/m 152.

R.T.
Vl. M.

HILVERSUM

28,1. Projectiestellingen in de scheefhoekige driehoek

Eigenschap 1. In een driehoek is het kwadraat van een zijde over een scherpe hoek gelijk aan de som van de kwadraten der beide andere zijden, verminderd met tweemaal een van deze andere, maal de projectie van de tweede op haar.

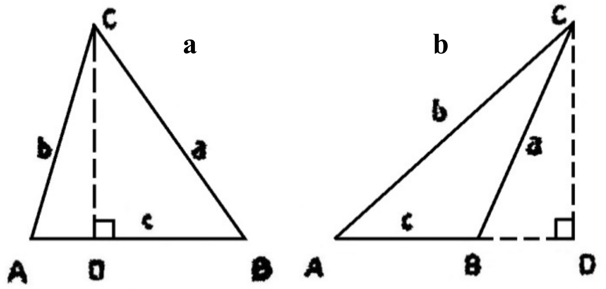


Fig. 28,1.

Gegeven: $\angle B < 90°$; $CD \perp AB$ (fig.28,1).
Te bewijzen: $AC^2 = BC^2 + AB^2 -$
$-2ab \times BD$.
Bewijs: In de rechthoekige driehoek ADC is $AC^2 = AD^2 + CD^2$. . . . . (1)
In de rechthoekige driehoek BCD is:
$CD^2 = BC^2 - BD^2$. . . . . (2)
Verder is $AD = AB - BD$, dus:
$AD^2 = (AB - BD)^2 =$ . . . . (3)
$= AB^2 - 2AB \times BD + BD^2$.
Substitueren we deze waarden van AD^2 en CD^2 volgens (2) en (3) in (1), dan vinden we:

$AC^2 = AB^2 - 2AB \times BD + BD^2 + BC^2 - BD^2$, of:
$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \times BD$.
Is $\angle A$ stomp (fig. 28,1), dan is $DA = BD - AB$, dus vinden we voor DA^2 dezelfde uitdrukking, zodat hetgeen wat bewezen moet worden juist is.

Eigenschap 2. In een driehoek is het kwadraat van een zijde over een stompe hoek gelijk aan de som van de kwadraten der beide andere zijden, vermeerderd met tweemaal een van deze andere, maal de projectie van de tweede op haar.

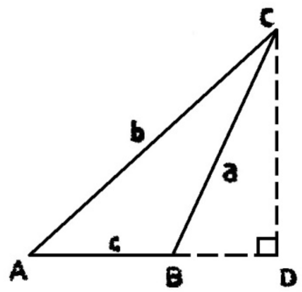


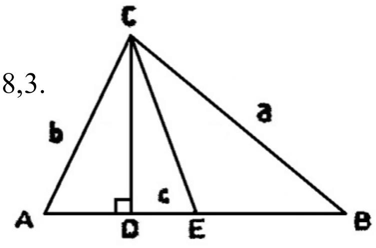
Fig. 28,2.

Gegeven: $\angle B > 90°$; $CD \perp AB$ (fig.28,2).
Te bewijzen: $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BD$.
Het bewijs verloopt op overeenkomstige wijze als bij eigenschap 1.
Opmerkingen: 1. Is hoek $B = 90°$, dan gaan de eigenschappen 1 en 2 over in de stelling van Pythagoras.
2. Noemen we de zijden van de driehoek a, b en c, dan is $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2b \times$ de projectie van c op b, maar ook is $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2c$ maal de projectie van b op c.
3. Is van een driehoek c de grootste zijde, dan is de driehoek rechthoekig, als $c^2 = a^2 + b^2$, scherphoekig als: $c^2 < a^2 + b^2$ en stomphoekig als: $c^2 => a^2 + b^2$.

28,2. Berekening van lijnen in een driehoek

1a. De zwaartelijn

Fig.28,3.



In $\Delta\, ACE$ (fig. 28,3) is $CE^2 = b^2 + AE^2 - 2AD \times AE$ (1).
Nu is $AE = ½c$ en AD de projectie van b op c, dus:
$AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$. Door deze waarde in (1) te substitueren vinden we: $CE^2 = b^2 + \frac{1}{4}c^2 - c \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$
$CE^2 = b^2 + \frac{1}{4}c^2 - ½b^2 - ½c^2 + ½a^2$ of:
$2CE^2 = a^2 + b^2 - ½c^2$.

b. De binnenbissectrix*[1]

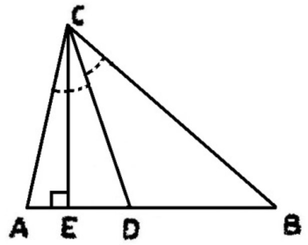


Fig. 28,4.

In $\Delta\, ACD$ (fig. 28,4) is:
$CD^2 = b^2 + AD^2 - 2AD \times AE$. . . . . (1)
Met behulp van de stelling: de bissectrice van een hoek verdeelt de overstaande zijde in stukken die zich verhouden als de aangrenzende zijden, vinden we:

$$AD = \frac{bc}{a+b}\,.$$

AE is de projectie van AC op AB, dus:

$$AE = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\,.$$

Door deze uitdrukking voor AD en AE in (1) te substitueren, vinden we:

$$CD^2 = b^2 + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{2bc}{a+b} \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\,.$$

Op deze wijze kunnen we de lengte van de binnenbissectrix berekenen uit de lengten van de zijden. (Deze formule niet van buiten leren; in voorkomende gevallen de formule afleiden). De buitenbissectrix kan op soortgelijke wijze worden gevonden.

c. De hoogtelijn

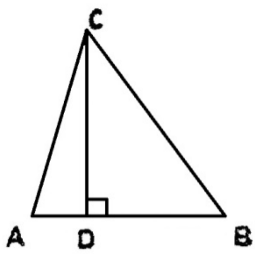


Fig. 28,5.

In $\Delta\, ABC$ (fig. 28,5) noemen we de lengte van de hoogtelijn $CD = h$. Dan is $\Delta\, ADC$:

$$h^2 = b^2 - AD^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

$$AD = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

Substitutie van (2) in (1) geeft:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3)}$$

We kunnen deze formule tot een andere gemakkelijk te onthouden vorm herleiden. Uit (3) volgt:

$$h^2 = \left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) = \left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2c}\right) =$$

$$= \frac{(b+c)^2-a}{2c} \times \frac{a^2-(b-c)^2}{2c} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2} =$$

De omtrek van een driehoek stellen we gewoonlijk voor door $2s$, dus $2s = a + b + c$.
Hiermee gaat onze laatste vorm over in:

$$h^2 = \frac{2s \times 2(s-a) \times 2(s-b) \times 2(s-c)}{4c^2} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}\,.$$

Derhalve is de lengte van de hoogtelijn p de zijde c:

$$h = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

(Deze formule wordt vaak gebruikt; deze formule onthouden).

Oplossingen inzenden van de opgaven 153 t/m 160.

[1] Zie deel 1, blz 32. (FV)

HILVERSUM

De merkwaardige lijnen in de driehoek

29,1. De zwaartelijn

Eigenschap 1.

Twee zwaartelijnen verdelen elkaar in de verhouding van 2 tot 1.

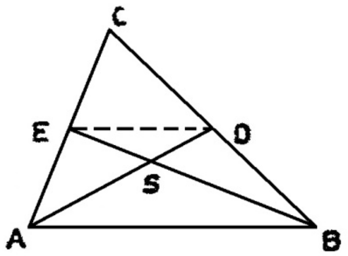


Fig. 29,1.

Gegeven: $AE = EC$; $BD = DC$ (fig. 29,1).
Te bewijzen: $AS : SD = BS : SE = 2 : 1$.
Bewijs: De lijn DE verbindt de middens van de opstaande zijden. Daarom is $ED//AB$ en is $ED = ½\, AB$.
De vierhoek $ABDE$ is dus een trapezium. In een trapezium verdelen de diagonalen elkaar in stukken, die zich verhouden als de aangrenzende evenwijdige zijden. Hieruit volgt:
$AS : SD = BS : SE = 2 : 1$.

Eigenschap 2. De drie zwaartelijnen snijden elkaar in één punt.

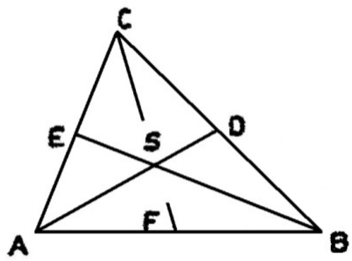


Fig. 29,2.

Gegeven: $AE = EC$; $BD = DC$; $AF = FB$ (fig.29,2).
Te bewijzen: AD, BE en CF snijden elkaar in één punt.
Bewijs: AD en BE snijden elkaar in een punt S zo, dat $AS = 2/3\ AD$. De zwaartelijn uit C snijdt AD ook in een punt zo, dat de afstand van A tot dat snijpunt 2/3 AD is.
De derde zwaartelijn gaat dus ook door S.
Opmerking. Het snijpunt van de zwaartelijnen in een driehoek heet het zwaartepunt.

29,2. De bissectrice

Eigenschap 1. De binnenbissectrices van een driehoek snijden elkaar is één punt.

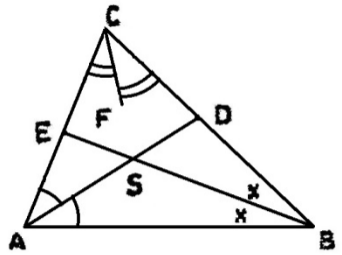


Fig. 29,3

Gegeven: $\angle CAD = \angle BAD$; $\angle ABE = \angle CBE$;
$\angle BCF = \angle ACF$ (fig. 29,3).
Te bewijzen: CF gaat door S.
Bewijs: Elk punt van een bissectrice ligt even ver van de benen van de hoek, die middendoor wordt gedeeld.
Elk punt van AD ligt dus even ver van AC als van AB.
Elk punt van BE ligt even ver van AB als van CB.
Hun snijpunt S ligt dus even ver van ieder der zijden.
Ieder punt van CF ligt even ver van AC als van BC en bevat alle punten, die even ver van AC als van BC liggen en gaat dus ook door S.

Opmerking. De drie buitenbissectrices snijden elkaar niet in één punt.
Het snijpunt van twee buitenbissectrices ligt op de binnenbissectrix van de derde hoek.

R.T.

58 Vl. M. Nadruk verboden

29,3. De middelloodlijn

Onder een middelloodlijn verstaan we de lijn, die een zijde loodrecht middendoor deelt.
Eigenschap. De drie middelloodlijnen snijden elkaar in één punt.

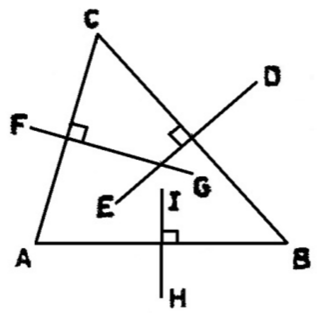


Fig. 29,4.

Gegeven: DE, FG en HI delen AB, BC en CA loodrecht middendoor (fig. 29,4).
Te bewijzen: DE, FG en HI snijden elkaar in één Punt.
Bewijs: Elk punt van DE ligt even ver van B als van C. Elk punt van FG ligt even ver van C als van A. Het snijpunt van DE en FG ligt dus even ver van de drie hoeken.

Elk punt van HI ligt even ver van A als van B en bevat alle punten, die even ver van A als van B liggen, dus gaat ook door het snijpunt van DE en FG.

29,4. De hoogtelijn

Eigenschap 1. De drie hoogtelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt.

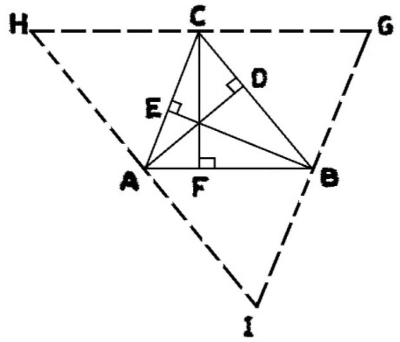


Fig. 29,5.

Gegeven: $AD \perp BC$; $BE \perp AC$; $CF \perp AB$ (fig. 29,5).
Te bewijzen: AD, BE en CF snijden elkaar in één punt.
Bewijs: Trek door de hoekpunten A, B en C van de driehoek lijnen evenwijdig aan de overstaande zijden. Deze lijnen vormen een driehoek GHI.
Van de vierhoek $ABCH$ lopen de zijden twee-aan-twee evenwijdig. Het is dus een parallellogram, evenals $ABCG$.

Hieruit volgt: $HC = AB$ en $CG = AB$, dus $HC = CG$.
De lijn CF is dus de middelloodlijn van HG. Eveneens is AD middelloodlijn van HI. De drie middelloodlijnen van $\Delta\ GHI$ snijden elkaar in één punt volgens de eigenschap van 29,3.
Daar deze middelloodlijnen tevens de hoogtelijnen van $\Delta\ ABC$ zijn, snijden de hoogtelijnen van een driehoek elkaar in één punt. Het snijpunt van de hoogtelijnen heet het hoogtepunt van de driehoek.

Oplossingen inzenden van de opgaven 161 t/m 165.

30,1. De cirkel

Als men een lijn om een uiteinde laat draaien, beschrijft het andere uiteinden een kromme lijn. De beschreven kromme heet een cirkel.

Definitie: Een cirkel is de meetkundige plaats van punten, die alle even ver van een bepaald punt, (het middelpunt) verwijderd zijn.

De afstand van het middelpunt tot een punt van de omtrek heet de straal.

Een rechte lijn, die twee punten van een cirkel verbindt, heet koorde.

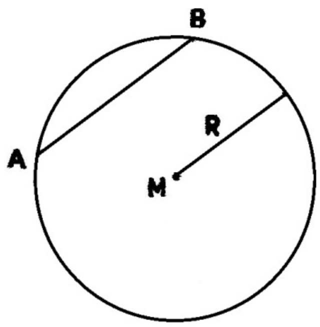


Fig. 30,1.

In fig. 30,1 is M het middelpunt van een cirkel met straal R. AB is een koorde.

Een koorde, die door het middelpunt gaat, heet middellijn.

Een middellijn is de langste koorde, die men in een cirkel kan trekken en is gelijk aan tweemaal de straal.

In een cirkel zijn dus alle middellijnen even groot. Een deel van een cirkelomtrek heet cirkelboog.

Eigenschap: Als de afstand van de middelpunten van twee cirkels kleiner is dan de som van de stralen van de twee cirkels, maar groter dan het verschil van die stralen, dan snijden die twee cirkels elkaar in twee punten.

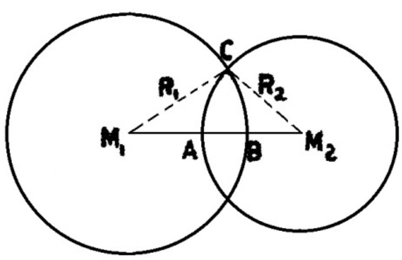


Fig. 30,2.

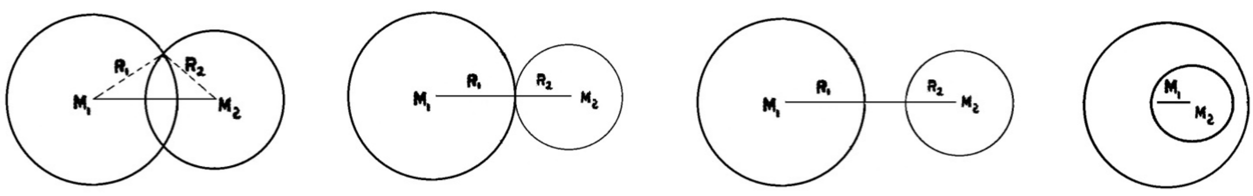
Gegeven: de cirkels met middelpunten
M_1 en M_2; $M_1B = R_1$ en $M_2A = R_2$.
$M_1M_2 < R_1 + R_2$ en $M_1M_2 > R_1 - R_2$.

Te bewijzen: De cirkels snijden elkaar in twee punten.

Bewijs: We verbinden M_1 en M_2 met punt C. Nu is in een driehoek de som van twee zijden groter dan de derde, dus:
$M_1C + M_2C > M_1M_2$, maar $M_1C = R_1$ en $M_2C = R_2$, dus $M_1M_2 < R_1 + R_2$.

De twee cirkels raken elkaar als: $M_1M_2 = R_1 + R_2$ en de cirkels raken elkaar niet als $M_1M_2 > R_1 + R_2$. De cirkels liggen dan geheel buiten elkaar.

Als $M_1M_2 < R_1 - R_2$ snijden de cirkels elkaar ook niet, de cirkels liggen dan in elkaar (zie fig. 30,3).



$M_1M_2 < R_1 + R_2$ $M_1M_2 = R_1 + R_2$ $M_1M_2 > R_1 + R_2$ $M_1M_2 < R_1 - R_2$

Fig. 30,3.

Een middellijn verdeelt de cirkel in twee delen, die elkaar volkomen kunnen bedekken, zodat een middellijn zowel de omtrek van de cirkel als het oppervlak van de cirkel in twee gelijke delen verdeelt. Een cirkel is bepaald door 3 punten, die niet op een rechte lijn mogen liggen. Beschouwen we een rechte lijn als een cirkel met een oneindige straal, dan behoeft de beperking, dat de punten niet op een rechte lijn mogen liggen, niet opgenomen te worden.

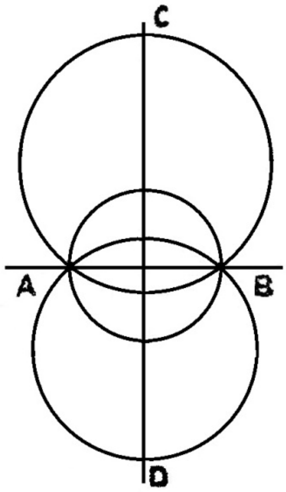


Fig. 30,4.

Door twee gegeven punten kunnen we oneindig veel cirkels trekken (zie fig. 30,4). De meetkundige plaats van de middelpunten der cirkels, die door twee gegeven punten gaan, is de middelloodlijn van de lijn te trekken tussen de twee gegeven punten. In fig. 30,4 zijn A en B de gegeven punten. CD is de middelloodlijn van AB.

Deze stelling volgt onmiddellijk uit de definitie van de cirkel, die zegt: dat de punten van de cirkel alle even ver van het middelpunt verwijderd zijn. Een punt op de middelloodlijn van AB is even ver verwijderd van A en B, dus het middelpunt van een cirkel, die door A en B gaat.

Een lijn kan hoogstens twee punten met een cirkel gemeen hebben, we noemen een lijn, die twee punten met een cirkel gemeen heeft een snijlijn.

Heeft een lijn slechts een punt met een cirkel gemeen, dan heet die lijn een raaklijn.

Heeft de lijn geen snijpunten met een cirkel, dan ligt de lijn geheel buiten de cirkel

Samenvattend kunnen we dus zeggen: als de afstand van de middelpunten van de cirkels groter is dan de som van de stralen van die 2 cirkels, dan liggen de cirkels geheel buiten elkaar. Is de afstand gelijk aan de som van de stralen dan raken de cirkels elkaar uitwendig. Is de afstand kleiner dan de som en groter dan het verschil van de stralen, dan snijden de cirkels elkaar. Is de afstand gelijk aan het verschil van de stralen, dan raken de cirkels elkaar inwendig. Is de afstand kleiner dan het verschil van de stralen, dan ligt de ene cirkel geheel binnen de andere. Is de afstand van de middelpunten gelijk aan nul, met andere woorden: vallen de middelpunten van de cirkels samen, dan spreken we van concentrische cirkels.

Oplossingen inzenden van de opgaven 166 t/m 172.

31,1. Hoeken en bogen

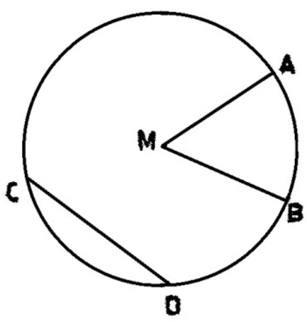


Fig. 31,1.

Een cirkelsector is een gedeelte van een cirkel dat begrensd wordt door twee stralen en een cirkelboog, bv. AMB in fig. 31,1.

De hoek AMB heet middelpuntshoek, deze "staat" op de boog AB. Een cirkelsegment is een gedeelte van de cirkel dat begrensd wordt door een koorde en een boog, bv. het deel CDE. Men zegt dat de koorde CD de boog onderspant.

Het $360°$-ste deel van de omtrek van een cirkel heet een booggraad, het $60°$-ste deel van een booggraad heet een boogminuut en het $60°$-ste deel van een boogminuut heet een boogseconde.
Dit is in overeenstemming met de begrippen graden, minuten en seconden, die we bij de hoeken reeds geleerd hebben. Ook de symbolen om deze grootheden aan te geven zijn hetzelfde als bij de hoeken.

Eigenschap: Een middelpuntshoek heeft evenveel hoekgraden als de boog waarop hij staat, booggraden heeft. We zeggen dit meestal als volgt:

Een middelpuntshoek is gelijk aan de boog waarop hij staat.

Eigenschap: Een omtrekshoek is gelijk aan de helft van de boog waarop hij staat.

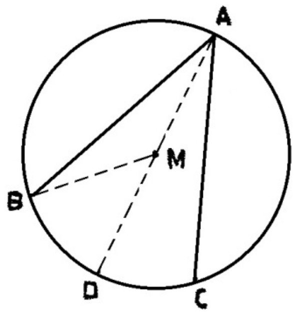


Fig. 31,2

Bewijs: $\angle BAC$ is de omtrekshoek, deze hoek staat op de boog BC (fig. 31,2).

We trekken nu de lijn AM en verlengen deze tot hij de cirkel snijdt in D. We verbinden M met B.
Nu is $\angle BMD$ een middelpuntshoek, dus gelijk aan boog BD. $\Delta\ BMA$ is gelijkbenig, daar $BM = MA = R$.
Dus is $\angle ABM = \angle BAD$. Maar $\angle BMD$ is de buitenhoek van $\Delta\ BMA$, dus gelijk aan de som van de niet aanliggende binnenhoeken, dus:
$\angle BMD = ABM + \angle BAD = 2\ \angle BAD$ of:
$\angle BAD =$ ½ $\angle BMD$. Daar $\angle BMD$ gelijk is aan boog BD, is $\angle BAD$ gelijk aan de halve boog BD.
Op gelijke wijze kunnen we bewijzen dat:
$\angle CAD =$ ½ boog CD, zodat $\angle BAC =$ ½ boog BC.

Deze laatstgenoemde stelling geldt eveneens voor de hoek, gevormd tussen een raaklijn en een koorde (zie fig. 31,3).

Hiervoor geldt $\angle BAC =$ ½ boog AC.

We hebben dus gezien dat een middelpuntshoek gelijk is aan de boog waarop hij staat en een omtrekshoek gelijk aan de halve boog waarop hij staat.

Is bv. een omtrekshoek gelijk aan 90°, dan is de boog waarop hij staat gelijk aan 180° (dus juist de helft van de omtrek van de cirkel). Bij een rechthoekige driehoek kunnen we het middelpunt dus vinden op de hypotenusa, terwijl de straal gelijk is aan de halve hypotenusa (zie fig. 31,4).

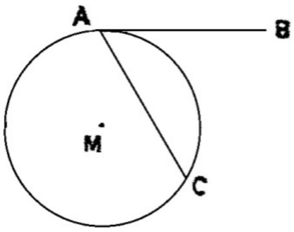


Fig. 31,3.

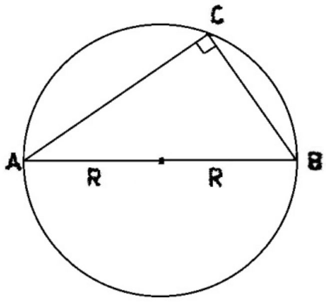


Fig. 31,4.

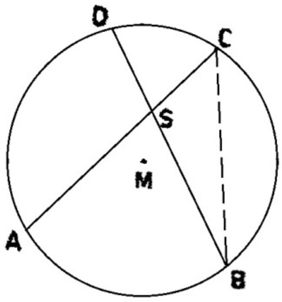


Fig. 31,5.

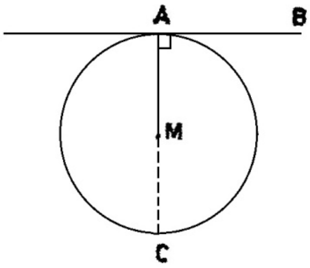


Fig. 31,6.

Indien we in een cirkel dus een middellijn tekenen en we verbinden de uiteinden van deze middellijn met een willekeurig punt van de omtrek van de cirkel, dan is de hoek gevormd tussen de twee koorden altijd gelijk aan 90°.

Eigenschap: De hoek, gevormd door twee lijnen, die elkaar binnen de cirkel snijden, is gelijk aan de halve som van de bogen, die binnen die hoek en de overstaande hoek liggen.

Bewijs: (zie fig. 31,5).

Verbind B met C.
Nu is $\angle DBC = ½$ boog CD en $\angle ACB = ½$ boog AB. Daar $\angle ASB$ de buitenhoek is van $\Delta\, SBC$ is $\angle ASB =$
$= \angle ACB + \angle DBC$, dus:
$\angle ASB = ½$ boog $AB + ½$ boog CD
of: $\angle ASB = ½$ (boog $AB +$ boog CD).

Eigenschap: Een raaklijn staat loodrecht op de straal van het raakpunt.

Bewijs: (zie fig. 31,6). Trek vanuit A door M een lijn, die de cirkel in C snijdt. Nu is AC een middellijn en $\angle BAC$ is een omtrekshoek, die op de halve cirkelomtrek staat.

De gehele cirkelboog van een cirkel bevat 360°, dus de halve cirkelboog 180°.
Dus $\angle BAC = ½$ boog $AC = ½ \times 180° = 90°$. Hieruit volgt, dat de raaklijn loodrecht staat op de straal naar het raakpunt.

Oplossingen inzenden van de opgaven 173 t/m 179.

HILVERSUM

32,1. Hoeken en bogen (vervolg)

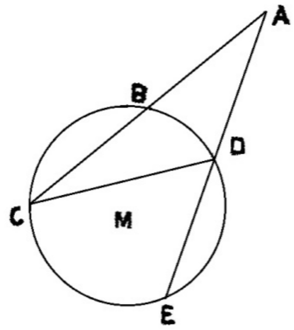


Fig. 32,1.

Eigenschap: De hoek, gevormd door twee lijnen, die elkaar buiten de cirkel snijden, is gelijk aan het halve verschil van de bogen, die binnen de hoek liggen.
Bewijs: (zie fig. 32,1). Verbind C met D.
Nu is $\angle CDE$ de buitenhoek van $\Delta\, ACD$, dus:
$\angle CDE = \angle ACD + \angle CAD$.
Hierin is $\angle CDE =$ ½ boog CE en
$\angle ACD =$ ½ boog BD, dus daar $\angle CAD = \angle CDE + -\angle ACD$ vinden we:
$\angle CAD =$ ½ boog $CE -$ ½ boog BD of:
$\angle CAD =$ ½ (boog $CE -$ boog BD).

Uit bovenstaande valt makkelijk te bewijzen dat de hoek, gevormd door een raaklijn en een snijlijn met de cirkel gelijk is aan het halve verschil van de bogen, die tussen de snijpunten en het raakpunt gelegen zijn (zie fig. 32,2).

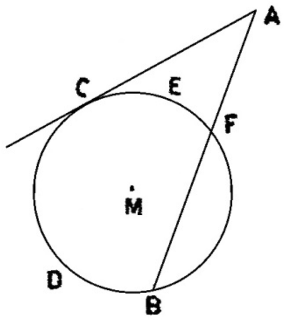


Fig. 32,2.

$\angle A =$ ½ (boog $CDB -$ boog CEF). (Het bewijs hiervan laten wij aan de cursist over.)
Eigenschap: De hoek, gevormd door twee raaklijnen is gelijk aan het halve verschil van de bogen, die tussen de raakpunten gelegen zijn (het bewijs hiervan laten wij aan de cursist over).

32,2. Constructie van de omgeschreven cirkel van een driehoek

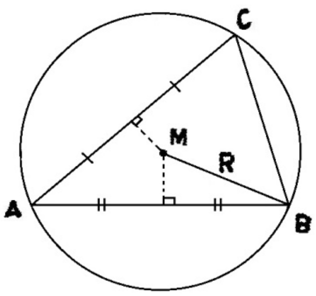


Fig. 32,3.

Daar er door drie punten, in een plat vlak gelegen, slechts 1 cirkel is te trekken, kan men door de hoekpunten van een driehoek slechts 1 cirkel construeren. Deze cirkel heet de omgeschreven cirkel van de driehoek. De middelpunten van alle cirkels, die door de punten A en B getrokken kunnen worden, liggen op de middelloodlijn van AB. De middelpunten van de cirkels, die door A en C getrokken kunnen worden, liggen op de middelloodlijn van AC.
Waar deze middelloodlijnen elkaar snijden, vinden we dus het middelpunt van de cirkel, die door alle drie punten gaat. Dus het middelpunt van de omgeschreven cirkel ligt op het snijpunt der middelloodlijnen der zijden van de driehoek. De straal is de lengte van het lijnstuk MA of MB of MC.

We kunnen bewijzen dat deze straal gelijk is aan het product der zijden van de driehoek, gedeeld door 4× het oppervlak van de driehoek. We zullen dit bewijs niet geven, doch alleen de formule vermelden,

aldus: $\boldsymbol{R = \frac{a\,b\,c}{40}}$.

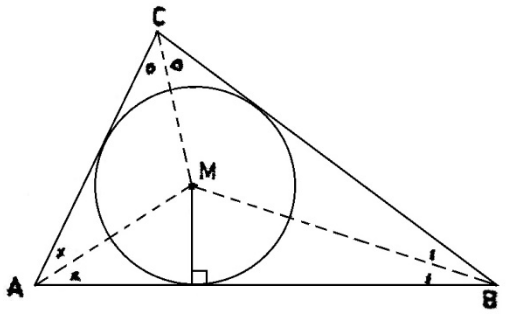


Fig. 32,4.

Trekken we in een driehoek de bissectrice van een der hoeken, dan geldt hiervoor, dat de bissectrice de meetkundige plaats is van punten, die alle even ver van de benen van de hoek verwijderd zijn.
Het snijpunt der bissectrices is dus een punt dat even ver van alle zijden van de driehoek af ligt. Beschrijven we dus met dit snijpunt als middelpunt een cirkel met als straal de afstand tot een van de zijden, dan zal deze cirkel raken aan alle zijden. Deze cirkel heet de <u>ingeschreven</u> cirkel van de driehoek (zie fig. 32,4).

Voor de straal van de ingeschreven cirkel kunnen we weer een formule afleiden. We zullen het bewijs hiervan niet geven, doch alleen weer de formule vermelden, deze luidt:

$$\boldsymbol{r = \frac{O}{s}}.$$

Hierin is O weer het oppervlak van de driehoek en s de halve omtrek van de zijden, dus:

$$s = ½\,(a + b + c).$$

<u>32,4. Constructie van de aangeschreven cirkel van een driehoek</u>

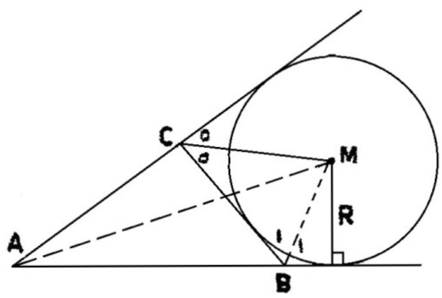


Fig. 32,5.

De aangeschreven cirkel van een driehoek raakt aan 1 zijde en aan het verlengde der beide andere.

Het middelpunt vinden we dus uit het snijpunt van de binnenbissectrice met de buitenbissectrices. De straal van de aangeschreven cirkel is te berekenen uit de formule:

$$\boldsymbol{r_a = \frac{O}{s - a}}.$$

Raakt de cirkel aan de zijde b, dan wordt dit: $r_b = \dfrac{O}{s-b}$ en raakt de cirkel aan de zijde c,

dan: $r_c = \dfrac{O}{s-c}$.

<u>In woorden:</u> De straal van de aangeschreven cirkel van een driehoek is gelijk aan het oppervlak van de driehoek, gedeeld door de halve omtrek, verminderd met de zijde waaraan de aangeschreven cirkel raakt.

<u>Opmerking:</u> We herhalen nog even de formules voor de omtrek en het oppervlak van een cirkel in verband met de te maken opgaven.

Omtrek cirkel $= 2\pi R$ of πd.
Oppervlak cirkel $= \pi R^2$ of $\frac{1}{4}\pi d^2$.
Hierin is R de straal van de cirkel, d de middellijn en $\pi = \frac{22}{7} = 3{,}14$.

Oplossingen inzenden van de opgaven 180 t/m 187.